

QCD Korrekturen zur Erzeugung von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

im Fach Physik

Spezialisierung: Theoretische Physik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Humboldt-Universität zu Berlin

von Herrn M. Sc. Stefan Mölbitz

Präsidentin der Humboldt-Universität zu Berlin:

Prof. Dr.-Ing. Dr. Sabine Kunst

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät:

Prof. Dr. Elmar Kulke

Gutachter:

1. Prof. Dr. Peter Uwer

2. Prof. Dr. Ramona Gröber

3. Prof. Dr. Barbara Jäger

eingereicht am:

4. September 2018

Tag der mündlichen Prüfung:

14. Dezember 2018

Abstract

The top quark is the heaviest known elementary particle. In the standard model (SM) of elementary particle physics it is produced predominantly in pairs by the strong interaction. The weak interaction enables the production of single top-quarks as well. The corresponding cross section is about one third of the cross section of pair production. The distinction from background is more difficult in the case of single top-quark production. Thus the discovery of top quarks in 1995 at the Tevatron collider at Fermilab used pair production.

Despite its difficult experimental signature, the production of single top-quarks is interesting as it is complementary to the production of pairs. For instance single top-quarks are highly polarized. As top quarks decay before they hadronize, the polarization affects the decay products of the top quark in an experimentally accessible way. Furthermore, the participation of bottom-quarks in the initial state allows a study of the corresponding parton distribution functions. A direct determination of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix element V_{tb} is possible too. The production of single top-quarks was discovered in 2009 at the Tevatron.

This thesis makes phenomenological predictions for the SM by calculating cross sections for the production of single top-quarks in association with two jets. Next-to-leading order corrections in quantum chromodynamics (QCD) are taken into account. These corrections are the most important contribution for precise predictions beyond the leading order calculation. Precise theoretical predictions for cross sections are mandatory for the search for new physics at the Large Hadron Collider at CERN. In contrast to the QCD corrections for the production of single top-quarks published in 2002 an additional particle in the final state was taken into account. As a consequence, new partonic initial states and contributions with exchange of color charge between the quark lines occur. As top quarks decay rapidly into a W boson and a bottom quark, a consistent separation from the production of top quark pairs and from the production of single top-quarks in association with a W boson must be ensured.

For the leading order analytical results for the square of the absolute value of the amplitudes are presented. The corrections in next-to-leading order QCD are calculated using established methods. The tensor integrals in the virtual corrections are reduced numerically to scalar integrals using existing numerical libraries. The real corrections are calculated using a self-written implementation of the Catani-Seymour formalism. The results were validated using internal tests. The numerical cancellation of the divergences is an especially important test for internal consistency. Furthermore, an external comparison with an independent implementation was made. The presentation of results starts with inclusive cross sections. The atypical scale dependence is discussed afterwards. In addition, differential cross sections using fixed scales are shown for transverse momenta, rapidities and further observables. For high transverse momenta a dynamical choice of scales becomes advantageous. Results using a dynamical choice of scales are presented as well.

Keywords: single top-quark production, next-to-leading order corrections, QCD corrections, dipole subtraction method

Kurzdarstellung

Das Top-Quark ist das schwerste bekannte Elementarteilchen. Im Standardmodell (SM) der Elementarteilchenphysik ist die Erzeugung in Paaren durch die starke Wechselwirkung der dominante Beitrag zu seiner Produktion. Top-Quarks können durch die schwache Wechselwirkung ebenfalls einzeln produziert werden. Der zugehörige Wirkungsquerschnitt beträgt etwa ein Drittel desjenigen der Paarproduktion. Die Unterscheidung vom Hintergrund ist im Fall der Einzelproduktion schwieriger; die Entdeckung des Top-Quarks im Jahr 1995 am Tevatron Beschleuniger am Fermilab erfolgte durch die Paarproduktion.

Die Einzelproduktion ist trotz ihres schwierigen experimentellen Nachweises wegen ihrer Komplementarität zur Paarproduktion interessant. So sind einzeln produzierte Top-Quarks stark polarisiert. Diese Polarisation führt wegen des Zerfalls von Top-Quarks vor ihrer Hadronisierung zu experimentell zugänglichen Auswirkungen auf die Zerfallsprodukte. Weiterhin erlaubt die Beteiligung von Bottom-Quarks im Anfangszustand die Untersuchung der zugehörigen Partonverteilungsfunktion. Eine direkte Bestimmung des Elementes V_{tb} der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix ist ebenfalls möglich. Die Einzelproduktion von Top-Quarks wurde erstmals 2009 am Tevatron entdeckt.

In dieser Arbeit werden für phänomenologische Vorhersagen Wirkungsquerschnitte für die Produktion einzelner Top-Quarks oder Top-Antiquarks in Assoziation mit zwei Jets im SM berechnet. Dabei werden die Korrekturen in der nächstführenden Ordnung der Quantenchromodynamik (QCD) berücksichtigt. Diese Korrekturen bilden den wichtigsten Beitrag jenseits der führenden Ordnung zur Verbesserung der theoretischen Vorhersage. Präzise theoretische Vorhersagen für Wirkungsquerschnitte sind für die Suche nach Physik jenseits des SM mit dem Large Hadron Collider am CERN unerlässlich. Im Unterschied zu den im Jahr 2002 veröffentlichten Korrekturen in der QCD zur Produktion einzelner Top-Quarks wurde ein zusätzliches Teilchen im Endzustand berücksichtigt. Als Folge treten neue partonische Anfangszustände und Beiträge mit Farbaustausch zwischen den Quark-Linien auf. Da Top-Quarks nach kurzer Zeit in ein W-Boson und ein Bottom-Quark zerfallen, muss zugleich eine konsistente Abgrenzung von der Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit einem W-Boson und von der Paarproduktion vorgenommen werden.

Für die führende Ordnung werden analytische Ergebnisse für die Betragsquadrate der Amplituden angegeben. Zur Berechnung der QCD Korrekturen wurden etablierte Methoden verwendet. Die in den virtuellen Korrekturen auftretenden Tensorintegrale wurden mit vorhandenen Bibliotheken numerisch auf skalare Integrale reduziert und ausgewertet. Für die reellen Korrekturen wurde der Catani-Seymour-Formalismus implementiert. Die berechneten Ergebnisse wurden durch interne Tests validiert, die numerische Kürzung der Divergenzen wird als wichtigster Test genannt. Ferner fand ein externer Vergleich mit einer unabhängigen Implementierung statt. Im Ergebnisteil werden inklusive hadronische Wirkungsquerschnitte angegeben. Im Anschluss wird die untypische Skalenabhängigkeit diskutiert. Weiterhin werden differenzielle Wirkungsquerschnitte in den transversalen Impulsen, Rapiditäten und in weiteren Observablen mit fester Wahl der Skalen gezeigt. Bei hohen transversalen Impulsen erweist sich eine dynamische Wahl der Skalen als vorteilhaft. Für diese werden ebenfalls Ergebnisse präsentiert.

Schlagwörter: Erzeugung einzelner Top-Quarks, Korrekturen in nächstführender Ordnung, QCD Korrekturen, Dipolsubtraktionsmethode

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Top-Quarks in Theorie und Experiment	5
2.2	Relevante Lagrange-Dichte und Feynman-Regeln	9
2.3	Berechnung der Born-Amplituden	12
2.4	Hadronische und partonische Wirkungsquerschnitte	21
2.5	Ergebnisse in führender Ordnung	32
3	Wirkungsquerschnitte in nächstführender Ordnung der QCD	41
3.1	Überblick über reelle und virtuelle Korrekturen	41
3.2	Virtuelle Korrekturen	48
3.2.1	Zerlegung der Einschleifen-Amplitude	49
3.2.2	Berechnung der Schleifenintegrale	52
3.2.3	Renormierung	56
3.3	Reelle Korrekturen	60
3.3.1	Formalismus von Catani, Dittmaier, Seymour und Trócsányi	60
3.3.2	Farb- und Spinkorrelationen	61
3.3.3	Reelle Prozesse und der Subtraktionsterm	64
3.3.4	Integrierter Subtraktionsterm	70
3.3.5	Einlaufende Partonen im Subtraktionsformalismus	73
3.4	Validierung der Rechnung	77
3.4.1	Tests der internen Konsistenz	77
3.4.2	Externe Vergleiche	81
4	Ergebnisse in nächstführender Ordnung der QCD	87
4.1	Inklusive Wirkungsquerschnitte	87
4.2	Differenzielle Wirkungsquerschnitte mit festen Skalen	96
4.3	Differenzielle Wirkungsquerschnitte mit dynamischen Skalen	105
5	Zusammenfassung	109
A	Anhang	111
A.1	Konventionen und Abkürzungen	111
A.2	Farbalgebra der QCD	111
A.3	Details zur Implementierung	114
A.4	Referenzwerte	117
A.5	Verwendete Hilfsmittel	119

1 Einleitung

Diese Arbeit macht phänomenologische Vorhersagen für das Top-Quark, das schwerste bekannte Elementarteilchen. Dafür werden Wirkungsquerschnitte für die Einzelproduktion von Top-Quarks im Rahmen des Standardmodells (SM) der Elementarteilchenphysik störungstheoretisch berechnet. Diese Wirkungsquerschnitte sind am Large Hadron Collider (LHC) in Experimenten zugänglich. Obwohl die Einzelproduktion von Top-Quarks im SM in führender Ordnung durch die schwache Wechselwirkung erfolgt, spielt die starke Wechselwirkung bei Korrekturen höherer Ordnung eine Schlüsselrolle. Die Berechnung dieser Korrekturen ist daher für präzise theoretische Vorhersagen zum Test des SM beim Vergleich mit dem Experiment erforderlich. Das Thema dieser Arbeit ist die Berechnung störungstheoretischer Korrekturen durch die starke Wechselwirkung zur Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit weiteren Teilchen.

Das SM beschreibt die bekannten Elementarteilchen und die Wechselwirkungen zwischen ihnen mit Ausnahme der Gravitation. Die bekannten Elementarteilchen sind sechs Leptonen, sechs Quarks, Eichbosonen und das Higgs-Boson. Im SM sind Leptonen und Quarks Dirac-Fermionen. Sie existieren dementsprechend jeweils als Teilchen und als Antiteilchen. Drei der sechs Leptonen sind elektrisch geladen: das Elektron e^- , das Muon μ^- und das Tauon τ^- . Die drei elektrisch ungeladenen Leptonen ν_e, ν_μ und ν_τ heißen Neutrinos. Der Betazerfall $N \rightarrow P + e^- + \bar{\nu}_e$ eines Neutrons N in ein Proton P , ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino $\bar{\nu}_e$ ist ein Beispiel für einen Prozess mit schwacher Wechselwirkung durch einen „geladenen Strom“. Im SM werden solche Prozesse durch Austausch elektrisch geladener W^+ - und W^- -Eichbosonen zwischen Teilchen aus Isospin-Doublets, z. B. (ν_e, e^-) , (ν_μ, μ^-) und (ν_τ, τ^-) , beschrieben. Die Neutrinos nehmen im SM nur an der schwachen Wechselwirkung teil und können mittels Austausch von elektrisch ungeladenen Z -Eichbosonen durch einen „neutralen Strom“ miteinander wechselwirken.

Die sechs Quarks u, d, c, s, b und t heißen Up-, Down-, Charm-, Strange-, Bottom- und Top-Quark. Die Quarks sind elektrisch geladen und nehmen daher wie Elektronen, Muonen und Tauonen an der elektromagnetischen Wechselwirkung teil. Im SM wird dies durch Austausch von Photonen, den Eichbosonen der elektromagnetischen Wechselwirkung, erklärt. Quarks tragen als einzige elementare Fermionen eine Farbladung und nehmen an der starken Wechselwirkung teil. Diese wird durch eine Quantenchromodynamik (QCD) genannte Eichtheorie beschrieben. Die Eichbosonen der QCD heißen Gluonen und tragen selbst eine Farbladung. Die starke Wechselwirkung zwischen zwei Quarks wächst mit ihrem Abstand, dies führt zum Confinement: Quarks schließen sich stets zu Hadronen, farbneutralen Bindungszuständen, zusammen. Beispiele für Hadronen sind die Nukleonen $P \equiv (uud)$ und $N \equiv (udd)$. Quarks bilden die Isospin-Doublets (u, d) , (c, s) und (t, b) .

Im SM werden die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung gemeinsam durch die elektroschwache Wechselwirkung beschrieben, deren Eichsymmetrie wegen der Massen der W - und Z -Bosonen gebrochen ist. Die elektroschwache Symmetriebrechung erfolgt durch den Brout-Englert-Higgs Mechanismus. Dieser Mechanismus beschreibt ebenfalls ein elektrisch ungeladenes massives Boson, das Higgs-Boson, und seine Wechselwir-

kungen mit den anderen Teilchen des SM. Die Kopplung des Higgs-Bosons an Fermionen erzeugt dabei die Massen der Fermionen im SM. Die Entdeckung des Higgs-Bosons im Jahr 2012 durch die Experimente ATLAS [1] und CMS [2] ist ein bedeutender Meilenstein für die Elementarteilchenphysik, da die Liste der bekannten Elementarteilchen nun mit der Liste der vom SM beschriebenen Elementarteilchen übereinstimmt.

Dennoch gibt es viele Gründe für die Existenz von Neuer Physik jenseits des SM. Exemplarisch werden die Begriffe Dunkle Materie, Baryonenasymmetrie und Neutrinomassen genannt. Dunkle Materie erklärt im Standardmodell der Kosmologie die Diskrepanz zwischen der sichtbaren und der gravitativ wechselwirkenden Materie im Universum. Obwohl es starke Gründe für einen Teilchencharakter der Dunklen Materie gibt, können die Elementarteilchen des SM allein nicht die Dunkle Materie bilden. Baryonen sind Bindungszustände aus drei Quarks. Baryonenasymmetrie bezeichnet das beobachtete Ungleichgewicht zwischen baryonischer Materie und baryonischer Antimaterie im Universum. Das SM kann das Ausmaß dieses Ungleichgewichts nicht erklären. Die Existenz von Neutrinomassen wurde durch den experimentellen Nachweis von Neutrinooszillationen, [3] und [4], bewiesen. Im SM werden Neutrinos hingegen als masselose Teilchen betrachtet.

Es muss folglich Neue Physik jenseits des SM geben. Eine Möglichkeit zur experimentellen Suche nach Neuer Physik sind Präzisionstests des SM zum Finden von Abweichungen. Das Top-Quark ist durch seine hohe Masse für solche Tests prädestiniert. Das Top-Quark wurde im Jahr 1995 durch die Experimente CDF [5] und D0 [6] am Teilchenbeschleuniger Tevatron bei Proton-Antiproton Kollisionen entdeckt. Die Entdeckung erfolgte durch die Produktion von Top-Quark Paaren durch die starke Wechselwirkung. Im SM erlaubt die Kopplung eines W -Bosons an das (t, b) Dublett ebenfalls die Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit zusätzlichen Teilchen, welche sich im Fall von Quarks oder Gluonen im Experiment durch Jets zeigen.

Die Erzeugung einzelner Top-Quarks stellt als erstes einen Test der Kopplung zwischen Top-Quarks und W -Bosonen dar. Im SM wird für diese Kopplung eine V-A Struktur vorhergesagt, welche zur Produktion von polarisierten Top-Quarks führt. Eine Besonderheit von Top-Quarks ist ihre kurze Lebensdauer im Vergleich zu anderen Quarks. Durch die kurze Lebensdauer zerfallen Top-Quarks, bevor sie Hadronen bilden. Die Polarisation der Top-Quarks hat dabei experimentell zugängliche Auswirkungen auf die Zerfallsprodukte. Weiterhin sind Bottom-Quarks an der Produktion von einzelnen Top-Quarks beteiligt. Dies erlaubt die Untersuchung der zugehörigen Partonverteilungsfunktion des Protons. Außerdem ist eine direkte Bestimmung des Elements V_{tb} der CKM-Matrix möglich.

Die Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit einem Jet und Korrekturen in der nächstführenden Ordnung der QCD (NLO QCD) wurde für stabile Top-Quarks in [7] berechnet. In [8] wurde zusätzlich der Zerfall von Top-Quarks berücksichtigt. Inzwischen wurde die Einzelproduktion auch näherungsweise mit Korrekturen in der übernächstführenden Ordnung der QCD (NNLO QCD) berechnet, in [9] für stabile Top-Quarks und in [10] mit Berücksichtigung von Top-Quark Zerfällen. Zur Näherung wurden dabei durch die Farbalgebra der QCD unterdrückte Beiträge mit Farbaustausch weggelassen, in denen der Impuls des virtuellen W -Bosons im Gegensatz zu den anderen Beiträgen nicht durch die externen Impulse fixiert ist. In dieser Arbeit wird die Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets in nächstführender Ordnung der QCD untersucht. Zum einen stellen die zugehörigen Amplituden einen Bestandteil der Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit einem Jet in NNLO QCD dar. Zum anderen erlaubt der LHC durch seine Luminosität eine eigenständige Betrachtung

dieses Prozesses. Der Beitrag mit Farbaustausch wird in dieser Arbeit berücksichtigt und auf seinen Einfluss auf das Gesamtergebnis untersucht.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit wird die Erzeugung einzelner Top-Quarks in führender Ordnung der Störungstheorie beschrieben. Zunächst wird ein Überblick über die Produktionskanäle des Top-Quarks im SM gegeben und der Stand der Theorie und des Experiments kurz zusammengefasst. Im nächsten Abschnitt wird der für diese Arbeit relevante Anteil der Lagrange-Dichte des SM explizit angegeben. Daraufhin werden die Streuamplituden für die führende Ordnung explizit analytisch berechnet. Ausgehend von den berechneten Streuamplituden zeigt der nächste Abschnitt die Berechnung von experimentell zugänglichen Wirkungsquerschnitten. Zum Abschluss des zweiten Kapitels werden numerische Ergebnisse und ihre Unsicherheiten in führender Ordnung präsentiert. Die Notwendigkeit, die Korrekturen in nächstführender Ordnung der QCD zu berechnen, wird begründet.

Die Berechnung dieser Korrekturen ist Thema des dritten Kapitels. Zunächst werden die beiden wesentlichen Anteile der nächstführenden Ordnung eingeführt, die virtuellen und die reellen Korrekturen. Beide Anteile werden jeweils mit etablierten Methoden ausgewertet. Die Herausforderung liegt in der Anwendung auf eine Vielzahl von Einzelprozessen. Außerdem muss in allen Komponenten der Rechnung eine konsistente Abgrenzung von anderen Produktionsmechanismen des Top-Quarks erfolgen, insbesondere von der Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson mit einem anschließenden Zerfall des W -Bosons in Quarks. Die Berechnung der virtuellen Korrekturen vom Aufstellen der Einschleifen-Diagramme bis zur Auswertung der auftretenden Schleifenintegrale erfolgt im zweiten Abschnitt. Sowohl in den virtuellen als auch in den reellen Korrekturen treten Divergenzen auf. Zur numerischen Behandlung der Divergenzen in den reellen Korrekturen wird der Subtraktionsformalismus in [11] verwendet. Im dritten Abschnitt wird die Anwendung dieses Subtraktionsformalismus auf die Produktion einzelner Top-Quarks dargestellt. Es wird zuerst die Masterformel für diesen Formalismus angegeben, anschließend wird auf die numerische Berechnung der einzelnen Bestandteile eingegangen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden interne und externe Tests zur Validierung der Rechnung gezeigt. Die Kürzung der Divergenzen zwischen den virtuellen und den reellen Korrekturen ist dabei ein wichtiger Test für die interne Konsistenz der Rechnung. Für einen externen Test findet unter anderem ein Vergleich mit einer unabhängigen Rechnung statt [12].

Im vierten Kapitel werden die Ergebnisse vorgestellt. Dabei kann zwischen inklusiven Ergebnissen für den Wirkungsquerschnitt und differenziellen Wirkungsquerschnitten in bestimmten Observablen unterschieden werden. Für den inklusiven Wirkungsquerschnitt werden zunächst Teilergebnisse angegeben. Auf dieser Basis wird diskutiert, welche Beiträge zum Wirkungsquerschnitt numerisch relevant sind. Für den inklusiven Wirkungsquerschnitt wird die Skalenabhängigkeit diskutiert, mit der sich Effekte in höherer Ordnung der Störungstheorie abschätzen lassen. Im nächsten Abschnitt werden Histogramme von differenziellen Wirkungsquerschnitten mit fester Skalenwahl gezeigt. Als Observablen werden unter anderem transversale Impulse und Pseudorapiditäten gewählt. Für eine verbesserte Beschreibung von Ereignissen mit hohem transversalem Impuls des Top-Quarks oder des Jets mit höchstem transversalem Impuls werden ebenfalls Ergebnisse für differenzielle Wirkungsquerschnitte mit dynamischer Skalenwahl gezeigt. Im letzten Kapitel erfolgt eine Zusammenfassung.

2 Grundlagen

2.1 Top-Quarks in Theorie und Experiment

Produktionsmechanismen im SM

Das Top-Quark koppelt an alle Eichbosonen des SM. Bei der Kopplung an Gluonen, Photonen und Z -Bosonen ist die zum Top-Quark zugehörige Flavour-Quantenzahl Topness, $T(t) = 1$ und $T(\bar{t}) = -1$, erhalten. Die Erhaltung der Topness hat zur Folge, dass nur Paare aus einem Top-Quark und einem Top-Antiquark produziert werden können, $T(gg) = T(t\bar{t}) = 0$. Bei Proton-Proton oder Proton-Antiproton Kollisionen führt die Kopplung an Gluonen zum größten Wirkungsquerschnitt. In Abb. 2.1a wird die Paarproduktion in führender Ordnung durch zwei Beispiele für Feynman-Diagramme veranschaulicht. Der Wirkungsquerschnitt der Paarproduktion ist in der Störungstheorie von der Ordnung $O(\alpha_s^2)$ in der Kopplungskonstanten α_s der starken Wechselwirkung.

Bei der Kopplung von Top-Quarks an W -Bosonen, $W^+ \rightarrow t\bar{b}$, ist die Topness nicht erhalten. Bei $T = 1$ für die auslaufenden Teilchen wird von Produktion einzelner Top-Quarks gesprochen. Im Folgenden wird das Partonmodell im 5-Flavour-Schema für Protonen verwendet. In diesem treten Gluonen g und Quarks q oder Antiquarks \bar{q} mit $q \in \{d, u, s, c, b\}$ als Partonen im Proton auf. Zunächst kann zwischen dem Fall eines reellen W -Bosons,

$$g + b \rightarrow W^- + t,$$

und Fällen mit virtuellen W -Bosonen, z. B.

$$u(p_1) + \bar{d}(p_2) \rightarrow \bar{b}(q_1) + t(q_2),$$

unterschieden werden. Diese Unterscheidung ist im Experiment relevant, da das reelle W -Boson auch rein leptonisch zerfallen kann. Quarks im Endzustand hingegen zeigen sich im Experiment durch mindestens einen Jet. In beiden Fällen tritt durch die Kopplung an ein W -Boson die Fermi-Kopplungskonstante G_F auf. Der erste Fall, die Produktion eines einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson (Abb. 2.1c), ist in führender Ordnung $O(G_F \alpha_s)$. Der zweite Fall wird s -Kanal der Top-Quark Einzelproduktion genannt, da für die einlaufenden Impulse $p_w^2 = (p_1 + p_2)^2 = s > 0$ mit der Mandelstam-Variablen s gilt. Weiterhin gibt es bei der Produktion einzelner Top-Quarks (Abb. 2.1b) die Prozesse

$$u(p_1) + b(p_2) \rightarrow d(q_1) + t(q_2) \text{ und } \bar{d}(p_1) + b(p_2) \rightarrow \bar{u}(q_1) + t(q_2),$$

die wegen $p_w^2 = (p_1 - q_1)^2 = t < 0$ nach der auftretenden Mandelstam-Variablen t -Kanal genannt werden. Die Produktion einzelner Top-Quarks im s - und im t -Kanal ist in führender Ordnung $O(G_F^2)$ und nicht von α_s abhängig. Das W -Boson kann im SM an alle Paare aus up-artigen und down-artigen Quarks koppeln, dies wird durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) beschrieben. Daher existieren weitere Prozesse, bei denen

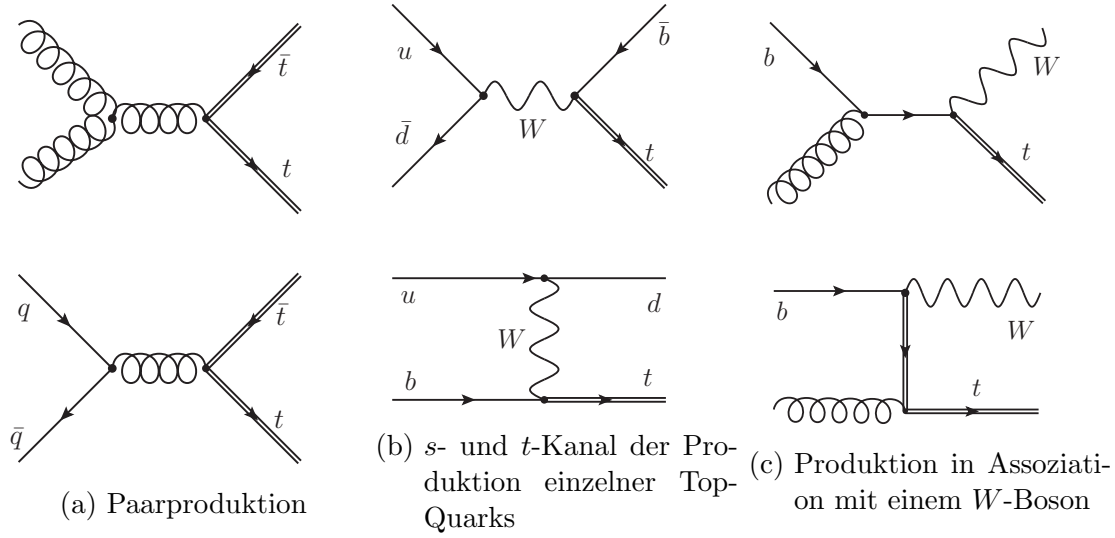


Abbildung 2.1: Produktionsmöglichkeiten des Top-Quarks im SM veranschaulicht durch Feynman-Diagramme

$\sqrt{s_{\text{had}}}$	$t\bar{t}$	tW	$\bar{t}W$	s -Kanal t	t -Kanal t	s -K. \bar{t}	t -K. \bar{t}
1,96 TeV	7,03 pb	0,065 pb	0,065 pb	0,450 pb	1,00 pb	0,450 pb	1,00 pb
8 TeV	240 pb	8,95 pb	8,89 pb	3,28 pb	55,3 pb	1,87 pb	30,1 pb
13 TeV	790 pb	28,8 pb	28,6 pb	6,20 pb	137 pb	3,89 pb	81,8 pb

Tabelle 2.1: Wirkungsquerschnitte für die Produktion von Top-Quarks in verschiedenen Produktionskanälen. In der zweiten Zeile werden $P\bar{P}$ Kollisionen angenommen (Tevatron), in der dritten und vierten PP Kollisionen (LHC).

einzelne Top-Quarks produziert werden. Diese unterscheiden sich jedoch nicht kinematisch von den bisher beschriebenen Prozessen. Weiterhin ist die Produktion von einzelnen Top-Antiquarks möglich, bei dieser gilt für die auslaufenden Teilchen $T = -1$. Die Produktion von einzelnen Top-Antiquarks kann durch Symmetrieüberlegungen aus der Produktion von einzelnen Top-Quarks abgeleitet werden.

Beobachtung im Experiment

Experimentell kann die Produktion von Top-Quarks an Teilchenbeschleunigern untersucht werden, wobei

$$N = \sigma \int L(t) dt$$

Ereignisse erwartet werden. Hierbei ist σ mit $[\sigma] = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$ der für den Prozess spezifische Wirkungsquerschnitt und L die Luminosität des Teilchenbeschleunigers. Stand 2018 konnte an zwei Teilchenbeschleunigern die Produktion von Top-Quarks untersucht werden; am im Jahr 2011 stillgelegten Tevatron am Fermilab durch Proton-Antiproton Kollisionen und am Large Hadron Collider (LHC) am CERN durch Proton-Proton Kol-

lisionen bzw. durch Kollision von Blei-Atomkernen. In Tabelle 2.1 sind Wirkungsquerschnitte für die Paarproduktion von Top-Quarks [13] und für die Einzelproduktion von Top-Quarks und von Top-Antiquarks [14] angegeben, die zugehörigen Rechnungen werden im nächsten Unterabschnitt genannt.

Wegen der Kurzlebigkeit von Top-Quarks und W -Bosonen können im Experiment nur deren Zerfallsprodukte beobachtet werden. Das Top-Quark zerfällt mit einer Zerfallsbreite von $\Gamma_t \approx 1,4 \text{ GeV}$ (Vorhersage der Theorie im SM), dies entspricht einer Lebensdauer von $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_t} \approx 4,7 \cdot 10^{-25} \text{ s}$, bevorzugt in ein Bottom-Quark und ein W -Boson, $t \rightarrow b + W^+$. Das W -Boson zerfällt mit $\Gamma_W = 2,1 \text{ GeV}$ zu 67% in Hadronen und zu je 11% in $e^+ \nu_e$, $\mu^+ \nu_\mu$ und $\tau^+ \nu_\tau$. Dies führt zu drei Fällen für die Paarproduktion: rein hadronischer Zerfall (46%), rein leptonischer Zerfall (11%) und gemischter Zerfall (44%). Bei der Einzelproduktion im s - oder t -Kanal führt der Zerfall des W -Bosons in ein Elektron oder in ein Muon zu einer charakteristischen Signatur.

Tevatron: Die Annihilation von Quarks und Antiquarks lieferte den dominanten Beitrag zur Paarproduktion am Tevatron. Dort erfolgte 1995 die Entdeckung des Top-Quarks bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 1,8 \text{ TeV}$ über die Paarproduktion durch die Detektoren CDF und D0 und die zugehörigen Kollaborationen. Dafür wurden sowohl rein leptonsche als auch gemischte Zerfälle bei $\int L dt = 67 \text{ pb}^{-1}$ (CDF $4,8 \sigma$ [5]) und $\int L dt \approx 50 \text{ pb}^{-1}$ (D0 $4,6 \sigma$ [6]) ausgewertet. Die Wirkungsquerschnitte für die Produktion von einzelnen Top-Quarks σ und von einzelnen Top-Antiquarks $\bar{\sigma}$ sind am Tevatron wegen der Kollision von Protonen und Antiprotonen identisch. Für den Wirkungsquerschnitt für die Produktion von einzelnen Top-Antiquarks wurde die Notation $\bar{\sigma}$ eingeführt. Die Entdeckung erfolgte 2009 bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 1,96 \text{ TeV}$ durch Auswertung von $\int L dt = 3,2 \text{ fb}^{-1}$ (CDF $5,0 \sigma$ [15]) bzw. von $\int L dt = 2,3 \text{ fb}^{-1}$ (D0 $5,0 \sigma$ [16]) an Daten. Mit dem Wirkungsquerschnitt ($\sigma_t + \bar{\sigma}_t$) aus Tabelle 2.1 entsprechen die zur Entdeckung genutzten integrierten Luminositäten $6,4 \cdot 10^3$ bzw. $4,6 \cdot 10^3$ Ereignissen. Von 2001 bis 2011 wurde am Tevatron in Run II bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 1,96 \text{ TeV}$ eine integrierte Luminosität von $\int L dt \approx 10 \text{ fb}^{-1}$ erzielt. Durch Auswertung dieser Daten wurde mit dem Ergebnis $(\sigma_s + \bar{\sigma}_s) = (1,10^{+0,33}_{-0,31}) \text{ pb}$ (D0 $3,7 \sigma$ [17]) ebenfalls Evidenz für die Produktion von einzelnen Top-Quarks im s -Kanal gefunden. Die Auswertung mit der gesamten erzielten Luminosität durch CDF und D0 zusammen [18] ergibt für die Einzelproduktion im t -Kanal $(\sigma_t + \bar{\sigma}_t) = (2,25^{+0,29}_{-0,31}) \text{ pb}$. Für die Summe aus s - und t -Kanal wurde $(\sigma_{st} + \bar{\sigma}_{st}) = (3,30^{+0,52}_{-0,40}) \text{ pb}$ gefunden. Wegen der Kopplung an ein W -Boson ist der Wirkungsquerschnitt für die Einzelproduktion von Top-Quarks vom Element V_{tb} der CKM-Matrix abhängig. Die gemeinsame Auswertung der Daten von CDF und D0 ergibt [18] $|V_{tb}| = 1,02^{+0,06}_{-0,05}$.

LHC: Für die Einzelproduktion von Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson wurde erstmals am LHC bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 7 \text{ TeV}$ Evidenz gefunden (ATLAS $3,3 \sigma$ [19], CMS $4,0 \sigma$ [20]). Für die Einzelproduktion von Top-Quarks im s -Kanal wurde bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ Evidenz gefunden (ATLAS $3,2 \sigma$ [21]). Für den Wirkungsquerschnitt wurde $(\sigma_s + \bar{\sigma}_s) = (4,8 \pm 0,8^{+1,6}_{-1,3}) \text{ pb}$ ermittelt. Die statistische Unsicherheit wurde wie im Folgenden als erstes und die systematische Unsicherheit als zweites angegeben. Für den t -Kanal der Einzelproduktion liegen für den LHC detaillierte Untersuchungen bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ vor. Diese Analysen nutzen den leptonschen Zerfall des W -Bosons in Elektronen und Muonen. Es wird daher nach einem Signal mit einem Elektron oder Muon gesucht, in welchem zusätzlich zwei Jets auftreten, von denen einer von einem Bottom-Quark stammt. Zusätzlich ist die Summe der transversalen Impulse der beobachteten auslaufenden Teilchen wegen der Beteiligung des Neutrinos nicht erhalten.

Der Hintergrund zu diesem Signal wird durch die Paarproduktion von Top-Quarks, W -Bosonen in Assoziation mit Jets und durch QCD Multijets gebildet. Die Unterscheidung des Signals vom Hintergrund ist für die Einzelproduktion somit schwieriger als für die Paarproduktion. Für den Wirkungsquerschnitt des t -Kanals der Einzelproduktion wurde von CMS bei $19,7 \text{ fb}^{-1}$ im Fall der Produktion von Top-Quarks $\sigma_t = (53,8 \pm 1,5 \pm 4,4) \text{ pb}$ und im Fall der Produktion von Top-Antiquarks $\bar{\sigma}_t = (27,6 \pm 1,3 \pm 3,7) \text{ pb}$ gefunden. Für den Quotienten $R_t = \sigma_t/\bar{\sigma}_t$ wurde $R_t = 1,95 \pm 0,1 \pm 0,19$ bestimmt. Die Analyse durch ATLAS [22] mit $20,2 \text{ fb}^{-1}$ an Daten ergibt im Fall von Top-Quarks $\sigma_t = (56,7^{+4,3}_{-3,8}) \text{ pb}$, im Fall von Top-Antiquarks $\sigma_t = (32,9^{+3,0}_{-2,7}) \text{ pb}$ und für den Quotienten $R = 1,72 \pm 0,09$. Diese Ergebnisse für den t -Kanal werden sowohl bei ATLAS als auch bei CMS durch systematische Unsicherheiten dominiert. Gegenüber 8 TeV wächst der Wirkungsquerschnitt für die Einzelproduktion im t -Kanal bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ um mehr als 100%. Für den t -Kanal gibt es bei dieser Schwerpunktsenergie ebenfalls Veröffentlichungen von ATLAS mit $3,2 \text{ fb}^{-1}$ [23] und CMS mit $2,2 \text{ fb}^{-1}$ [24]. Das Ergebnis von CMS ist $(\sigma_t + \bar{\sigma}_t) = (238 \pm 13 \pm 29) \text{ pb}$ und $R_t = (1,81 \pm 0,18 \pm 0,15)$. Das Ergebnis von ATLAS ist $(\sigma_t + \bar{\sigma}_t) = (247 \pm 6 \pm 45) \text{ pb}$ und $R_t = (1,72 \pm 0,09 \pm 0,18)$. Zusammenfassend wird festgestellt, dass die im Experiment ermittelten Wirkungsquerschnitte verträglich mit der theoretischen Vorhersage durch das SM sind.

Theoretische Vorhersagen

Die Produktion von Top-Quarks wird jenseits der führenden Ordnung der Störungstheorie stets durch die QCD beeinflusst. Für den Wirkungsquerschnitt σ gilt störungstheoretisch

$$\sigma = \alpha_s^k \sigma_0 + \alpha_s^{k+1} \sigma_1 + \alpha_s^{k+2} \sigma_2 + O(\alpha_s^{k+3}), \quad (2.1)$$

wobei eine Reihenentwicklung in der Kopplungskonstanten α_s der starken Wechselwirkung stattfindet. Der erste Summand, $\sigma_{\text{LO}} = \alpha_s^k \sigma_0$, ist der Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung (LO). Es folgen die nächstführende Ordnung (NLO) $\sigma_{\text{NLO}} = (\alpha_s^{k+1} \sigma_1 + \sigma_{\text{LO}})$ und die übernächstführende Ordnung (NNLO) $\sigma_{\text{NNLO}} = (\alpha_s^{k+2} \sigma_2 + \sigma_{\text{NLO}})$. Im Fall der Paarproduktion ($k = 2$) sind die NNLO Korrekturen in der QCD bekannt [25]. Die angegebenen Wirkungsquerschnitte für die Paarproduktion in Tabelle 2.1 berücksichtigen diese Korrekturen zusammen mit NLO Korrekturen in der schwachen Wechselwirkung [26]. Für die Erzeugung einzelner Top-Quarks im s - und t -Kanal ($k = 0$) wurden NLO Korrekturen in der QCD [7] berücksichtigt, ebenso für die Einzelproduktion in Assoziation mit einem W -Boson [27] ($k = 1$). In [28] und [29] wurde für die Erzeugung einzelner Top-Quarks im s - und im t -Kanal in NLO QCD zusätzlich der Zerfall des Top-Quarks berücksichtigt. Es existieren ebenfalls genäherte Ergebnisse in NNLO QCD [9], bei denen durch die Farbalgebra der QCD unterdrückte Diagramme vernachlässigt wurden. Diese Korrekturen sind von der Ordnung $O(\alpha_s^2 G_F^2)$. In [10] wurde zusätzlich der Zerfall des Top-Quarks berücksichtigt.

Über die bisher besprochene Störungstheorie in fester Ordnung gemäß Gl. (2.1) hinaus gibt es weitere Methoden zur Verbesserung der theoretischen Vorhersagen. Zum einen können Wirkungsquerschnitte auch in Logarithmen L zu Beiträgen der Form $\propto (\alpha_s L^2)^n$ entwickelt und anschließend resummiert werden. Bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks treten an der Produktionsschwelle Logarithmen $L = \ln[(s + t + u - m_t^2)/m_t^2]$ auf. Diese Logarithmen wurden in [30] resummiert. In der nächsthöheren Ordnung erfolgte die

Resummation in [31]. Zum anderen müssen für exklusive Wirkungsquerschnitte „Parton-Shower“ und Hadronisierung berücksichtigt werden. Dies erfolgt in Monte-Carlo-Generatoren. Implementierungen der Produktion einzelner Top-Quarks erfolgten z. B. in [32] und [33].

Erzeugung von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets

Durch die hohe Luminosität des LHC werden in einer Vielzahl von Ereignissen einzelne Top-Quarks in Assoziation mit mehreren Jets produziert. Zur Beschreibung der Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets muss an die angegebenen Prozesse zur Produktion einzelner Top-Quarks ein zusätzliches Parton im Endzustand hinzugefügt werden, was die Ordnung in der starken Kopplungskonstanten erhöht. Im s - und t -Kanal führt dies zu partonischen Prozessen vom Typ $u + b \rightarrow d + t + g$, die von der Ordnung $O(G_F^2 \alpha_s)$ sind. Zum einen sind diese Beiträge gegenüber dem Prozess ohne zusätzliches Parton um einen Faktor $O(\alpha_s)$ unterdrückt, zum anderen treten neue partonische Anfangszustände auf, z. B. $u + g \rightarrow \bar{b} + t + d$. Diese neuen Anfangszustände können bei Beteiligung von Valenzquarks und Gluonen einen großen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt liefern.

In dieser Arbeit wird die Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets in nächstführender Ordnung der QCD betrachtet. Diese Korrekturen sind von der Ordnung $O(G_F^2 \alpha_s^2)$ und somit auch ein Beitrag zu den Korrekturen in NNLO QCD zur Produktion einzelner Top-Quarks. Der am Ende dieser Arbeit bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ gefundene Wert von $(\sigma + \bar{\sigma}) = 18,1 \text{ pb}$ entspricht bei $\int L dt = 20,2 \text{ fb}^{-1}$ mehr als $3 \cdot 10^5$ Ereignissen, relativ zur Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit einem Jet sind dies 20%.

Im nächsten Abschnitt wird der Anteil der Lagrange-Dichte des SM angegeben, der für die Rechnung zur Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets in NLO QCD benötigt wird. Auf dieser Grundlage werden sodann die Betragsquadrate der Born-Amplituden bestimmt, aus denen die Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung folgen.

2.2 Relevante Lagrange-Dichte und Feynman-Regeln

Die Lagrange-Dichte des SM besteht aus einem Anteil für die starke Wechselwirkung \mathcal{L}_{QCD} , einem Anteil für die elektroschwache Theorie \mathcal{L}_{GSW} (Glashow, Salam, Weinberg) und einem Anteil für die Wechselwirkungen mit dem Higgs-Boson \mathcal{L}_{BEH} (Brout, Englert, Higgs). Ein Zugang zur Berechnung von Streuamplituden ausgehend von der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{GSW}} + \mathcal{L}_{\text{BEH}}$$

ist das Aufstellen von Feynman-Regeln für Vertices und Propagatoren. Die Streuamplitude folgt in diesem Zugang durch Summation über die aus diesen Regeln folgenden Feynman-Diagramme. Für die Erzeugung von einzelnen Top-Quarks ist der Beitrag \mathcal{L}_{BEH} , von der Generierung der Massen abgesehen, nicht relevant, da keine direkten Wechselwirkungen mit dem Higgs-Boson auftreten. Tatsächlich werden nur \mathcal{L}_{QCD} und der Anteil von \mathcal{L}_{GSW} benötigt, der die Wechselwirkung von Quarks mit W -Bosonen beschreibt. Im Folgenden werden nur die in dieser Arbeit relevanten Vertices und Propagatoren angegeben.

QCD Anteil

Die Eichbosonen der QCD, die Gluonen, können mit Quarks und mit sich selbst, $\mathcal{L}_{\text{Gluon}}$, wechselwirken. Mit den Konventionen aus dem Anhang A.1 gilt

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{\psi}_{q,j} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{jk} - \delta_{jk} m_q I_4 + g_s \gamma^\mu A_\mu^a T_{jk}^a) \psi_{q,k} + \mathcal{L}_{\text{Gluon}}.$$

Die Summe in q läuft über alle Flavour der Quarks, $q \in \{u, d, c, s, t, b\}$. Die Summen in $j, k \in \{1, 2, 3\}$ laufen über alle Farben der Quarks, während die Summe in $a \in \{1, 2, \dots, 8\}$ über alle Generatoren T^a der Farbalgebra läuft. Die Felder A_μ^a beschreiben die Gluonen. Die Farbalgebra der QCD wird in Anhang A.2 dargestellt. Die Massen der Quarks m_q folgen im SM aus einer Yukawa-Kopplung an das Higgs-Boson. Die zugehörigen Yukawa-Kopplungen und die Kopplungskonstante $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ der starken Wechselwirkung sind Parameter des SM. Der Quarkpropagator

$$i \frac{\not{p} + m I_4}{p^2 - m^2 + i0} \delta_{jk}$$

folgt aus den ersten beiden Termen von \mathcal{L}_{QCD} . Aus dem Term $\propto \bar{\psi} A \psi$ folgt der Vertex

$$ig_s \gamma^\mu T_{jk}^a$$

für die Wechselwirkung eines Gluons mit einem Quark. Im Selbstwechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{Gluon}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Eich}}$$

mit $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ und den adjungierten Farbindices a, b, c wird eine Eichfixierung benötigt, welche die Eichung des Gluonpropagators festlegt. Aus dem Beitrag $\propto (\partial A)(\partial A)$ folgt zusammen mit $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ der Gluonpropagator. Für die Wahl

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{2\zeta_g} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \mathcal{L}_{\text{Geist}}$$

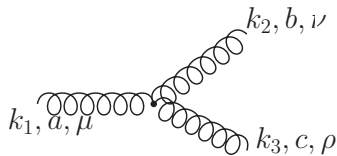
folgt der Gluonpropagator

$$-i\delta_{ab} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i0} - (1 - \zeta_g) \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2} \right]$$

mit dem Eichparameter ζ_g . Aus dem Summanden

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = \bar{c}^a (-\partial^2 \delta_{ac} - g_s \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c$$

folgen Feynman-Regeln für Geister. Der Beitrag $\propto \bar{c} A c$ beschreibt einen Gluon-Geist-Antigeist Vertex und der Beitrag $\propto \bar{c} \partial^2 c$ einen Geistpropagator. Feynman-Diagramme mit Geistern werden in dieser Arbeit nicht benötigt. Der Beitrag $\propto A^2(\partial A)$ in $\mathcal{L}_{\text{Gluon}}$ führt zu einem Vertex



$$g_s f^{abc} [(k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\rho} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\rho\mu} + (k_1 - k_2)_\rho g_{\mu\nu}]$$

aus drei Gluonen. Hierbei gehören (k_1, a, μ) , (k_2, b, ν) und (k_3, c, ρ) jeweils zu einem Gluon, die Impulse sind einlaufend. Der Vierervertex aus dem Beitrag $\propto A^4$ tritt in dieser Arbeit nicht auf.

Wechselwirkungen mit W-Bosonen

Die Wechselwirkung des W -Bosons mit den Fermionen des SM wird durch

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g_w}{\sqrt{2}} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu P_L \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W_\mu^- \right] \Psi_i$$

beschrieben. Die Summe in i läuft über die Isospin-Doublets

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}.$$

Das W -Boson koppelt mit der Stärke $g_w = 2^{5/4} m_w \sqrt{G_F}$ an die linkshändigen Komponenten der Isospin-Doublets. Für die Felder d', s', b' gilt

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

mit der CKM-Matrix V_{CKM} . Für die Wechselwirkung eines W -Bosons mit einem Up-Quark und einem down-artigen Quark folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Wu} &= -\frac{g_w}{\sqrt{2}} [\bar{u} \gamma^\mu P_L W_\mu^+ d' + \bar{d}' \gamma^\mu P_L W_\mu^- u] \\ &= -\frac{g_w}{\sqrt{2}} [\bar{u} \gamma^\mu P_L W_\mu^+ (dV_{ud} + sV_{us} + bV_{ub})] \\ &\quad -\frac{g_w}{\sqrt{2}} [(dV_{ud}^* + \bar{s}V_{us}^* + \bar{b}V_{ub}^*) \gamma^\mu P_L W_\mu^- u]. \end{aligned}$$

Die Feynman-Regeln für up-artige Quarks $f \in \{u, c, t\}$ und down-artige Quarks $g \in \{d, s, b\}$ lassen sich nun aus der Lagrange-Dichte ablesen. Für ein einlaufendes down-artiges Quark folgt



$$\frac{-ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\mu P_L V_{fg},$$

ein auslaufendes down-artiges Quark führt hingegen zu



$$\frac{-ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\mu P_L V_{fg}^*.$$

W-Boson Propagator

Analog zur QCD ist zum Aufstellen eines Propagators für das W -Boson eine Eichfixierung erforderlich. In der R_ξ -Eichung gilt für den Propagator

$$\frac{-i}{p^2 - m_w^2 + i0} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \zeta_w) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \zeta_w m_w^2} \right].$$

In dieser Eichung treten neben Geistern auch Goldstone-Teilchen auf. Für jedes Feynman-Diagramm mit einem internen W -Boson existieren analoge Diagramme mit einem Goldstone-Teilchen an Stelle des W -Bosons. Die Kopplung der Goldstone-Teilchen an Quarks ist jedoch proportional zu deren Masse. Wird von den Massen der Quarks allein die des Top-Quarks berücksichtigt, so verschwinden alle Diagramme mit Goldstone-Teilchen. Von nun an wird für die Propagatoren die Feynman-Eichung $\xi = \zeta_g = \zeta_w = 1$ gewählt, welche zu einer Vereinfachung der Propagatoren führt.

2.3 Berechnung der Born-Amplituden

In diesem Abschnitt werden die über den Spin der Teilchen gemittelten Betragsquadrate der Born-Amplituden berechnet. Die Berechnung eines ausgewählten Prozesses genügt dafür, da Prozesse mit anderen Teilchen im Anfangs- und Endzustand durch Kreuzen der Impulse folgen. Die Born-Amplitude $\mathcal{A}_{\text{Born}}$ für den Prozess $ub \rightarrow dtg$ ist die Summe aus vier Feynman-Diagrammen, siehe Abb. 2.2a und Abb. 2.2b. Zur Illustration der Vorgehensweise wird zunächst die Amplitude $\mathcal{A}_{ub,dt}$ für den Prozess $u(p_1) + b(p_2) \rightarrow d(q_1) + t(q_2)$ berechnet. Diese Amplitude besteht aus nur einem Feynman-Diagramm, dies reduziert die Komplexität der Rechnung. Die Anwendung der Feynman-Regeln aus dem vorherigen Abschnitt ergibt

$$\mathcal{A}_{ub,dt}^{s_u, s_b, s_d, s_t} = \frac{-i}{t - m_w^2} \left(\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{u}(q_1) V_{ud}^* \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(q_2) V_{tb} \gamma_\mu P_L u(p_2).$$

Im nächsten Schritt wird mit der Identität

$$\sum_{s \in \{-, +\}} u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m I_4$$

zur Mittlung und Summation über die Spins der Quarks das Betragsquadrat der Amplitude

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{ub,dt}|^2 &:= \frac{1}{4} \sum_{s_u, s_b} |\mathcal{A}_{ub,dt}^{s_u, s_b}|^2 = \frac{g_w^4 |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2}{16(t - m_w^2)^2} |T|^2 \text{ mit} \\ |T|^2 &= \text{Sp} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu P_L \not{p}_1 P_R \gamma^\nu \right] \text{Sp} \left[(\not{q}_2 + m_t) \gamma_\mu P_L \not{q}_2 P_R \gamma_\nu \right] \end{aligned}$$

berechnet. Spuren aus Dirac-Matrizen wurden mit FORM [34], einem Computeralgebrasystem, ausgewertet. Mit $|T|^2 = 16(p_1 p_2)(q_1 q_2) = 4s(s - m_t^2)$ folgt das Ergebnis

$$|\mathcal{A}_{ub,dt}|^2 = \frac{1}{4} g_w^4 \frac{s(s - m_t^2)}{(t - m_w^2)^2} |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2. \quad (2.2)$$

Zwei weitere Prozesse mit anderen Anfangszuständen folgen durch Kreuzen. Der Austausch $q_1 \leftrightarrow -p_2$ entspricht der Vertauschung $s \leftrightarrow t$ für die Mandelstam-Variablen und führt zu

$$|\mathcal{A}_{u\bar{d},\bar{b}t}|^2 = \frac{1}{4} g_w^2 \frac{t(t - m_t^2)}{(s - m_w^2)^2} |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2,$$

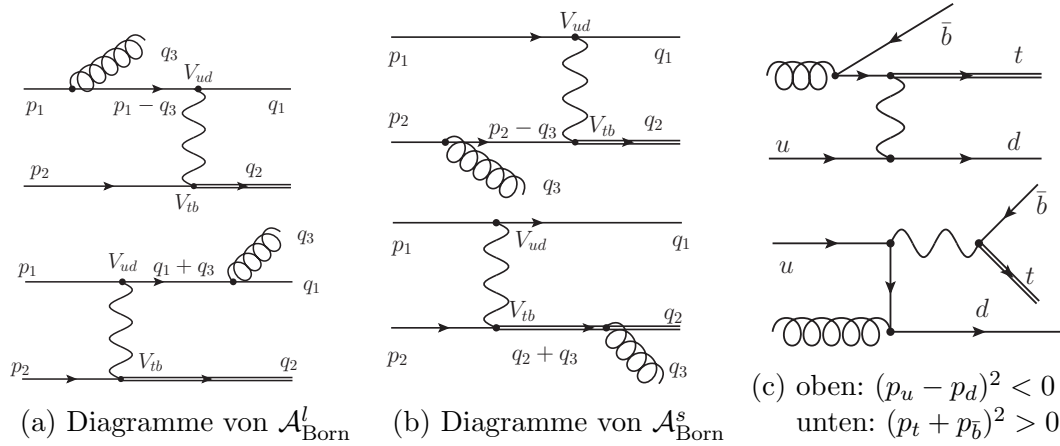


Abbildung 2.2: Born-Diagramme für $u(p_1) + b(p_2) \rightarrow d(q_1) + t(q_2) + g(q_3)$ und $ug \rightarrow t\bar{b}d$

während der Austausch $p_1 \leftrightarrow -q_1$ den Vertauschungen $t \leftrightarrow t$ und $s \leftrightarrow (m_t^2 - s - t)$ entspricht und zu

$$|\mathcal{A}_{u\bar{d},\bar{b}t}|^2 = \frac{1}{4}g_w^2 \frac{(s+t)(s+t-m_t^2)}{(t-m_w^2)^2} |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2$$

führt. Diese Ergebnisse für die Betragsquadrate der Amplituden stimmen mit den Gleichungen im Anhang von [35] überein. Die numerische Auswertung der berechneten Betragsquadrate ausgehend von Impulsen erfordert Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und eine Division. Dies erlaubt eine effiziente numerische Implementierung. Nun werden analoge Ausdrücke für ein zusätzliches Gluon im Endzustand aufgestellt, die ebenfalls effizient numerisch ausgewertet werden können.

Aufstellen der Amplitude für den Prozess $u + b \rightarrow d + t + g$

Die vier Feynman-Diagramme für diesen Prozess,

$$\mathcal{A}_{\text{Born}} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4,$$

sind in Abb. 2.2a und Abb. 2.2b dargestellt. In Abb. 2.2a wird das Gluon oben vom Up-Quark (\mathcal{A}_1) und unten vom Down-Quark (\mathcal{A}_2) abgestrahlt. Beide Diagramme mit der Abstrahlung eines Gluons von der leichten Quark-Linie sind zusammen eichinvariant. Die Abstrahlung von der schweren Quark-Linie, also vom Bottom-Quark (\mathcal{A}_3) oder vom Top-Quark (\mathcal{A}_4), wird in Abb. 2.2b gezeigt. Einsetzen der Feynman-Regeln ergibt für das erste Feynman-Diagramm

$$\mathcal{A}_1 = \left(\frac{-ig_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{(-ig_{\mu\nu})}{(q_2 - p_2)^2 - m_w^2} \frac{i}{(p_1 - q_3)^2} (ig_s) \times \\ \bar{u}(q_2) \gamma^\mu P_L u(p_2) \bar{u}(q_1) \gamma^\nu P_L (\not{p}_1 - \not{q}_3) \not{q}_3 u(p_1) \delta_{bt} T_{du}^g.$$

Die Faktoren aus der CKM-Matrix werden im Abschnitt 2.4 betrachtet. Zur besseren Übersicht wird eine Auftrennung

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= V_1 C_1 \frac{T_1}{N_1^W N_1^Q}, \\
V_1 &= -i \frac{g_s g_w^2}{2}, \\
C_1 &= \delta_{bt} T_{du}^g, \\
T_1 &= \bar{u}(q_2) \gamma^\mu P_L u(p_2) \bar{u}(q_1) \gamma_\mu P_L (\not{p}_1 - \not{q}_3) \not{\epsilon}(q_3) u(p_1), \\
N_1^W &= [(q_2 - p_2)^2 - m_w^2] \text{ und} \\
N_1^Q &= (p_1 - q_3)^2
\end{aligned}$$

in den Vorfaktor aus Konstanten V_1 , den Farbanteil C_1 , die Nenner der Propagatoren N_1^W und N_1^Q sowie die Spinoren und Dirac-Matrizen T_1 vorgenommen. Die Auftrennung erfolgt analog für die anderen Feynman-Diagramme. Die Betragsquadrate der Vorfaktoren

$$|V|^2 = |V_1|^2 = |V_2|^2 = |V_3|^2 = |V_4|^2 = \frac{g_s^2 g_w^4}{4} = \alpha_s \pi g_w^4$$

sind in allen vier Fällen gleich. Das zweite Feynman-Diagramm

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= V_2 C_2 \frac{T_2}{N_2^W N_2^Q} \text{ mit} \\
C_2 &= C_1, \\
T_2 &= \bar{u}(q_2) \gamma^\mu P_L u(p_2) \bar{u}(q_1) \not{\epsilon}(q_3) (\not{q}_1 + \not{q}_3) \gamma_\mu P_L u(p_1), \\
N_2^W &= [(q_2 - p_2)^2 - m_w^2] \text{ und} \\
N_2^Q &= (q_1 + q_3)^2
\end{aligned}$$

hat den gleichen Farbanteil wie das erste. Für das dritte und vierte Feynman-Diagramm mit

$$\begin{aligned}
C_3 &= C_4 = \delta_{ud} T_{tb}^g, \\
T_3 &= \bar{u}(q_1) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(q_2) \gamma_\mu P_L (\not{p}_2 - \not{q}_3) \not{\epsilon}(q_3) u(p_2), \\
T_4 &= \bar{u}(q_1) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(q_2) \not{\epsilon}(q_3) (\not{q}_2 + \not{q}_3 + m_t) \gamma_\mu P_L u(p_2), \\
N_3^W &= N_4^W = [(q_1 - p_1)^2 - m_w^2], \\
N_3^Q &= (p_2 - q_3)^2 \text{ und} \\
N_4^Q &= (q_2 + q_3)^2 - m_t^2
\end{aligned}$$

ist der Farbanteil ebenfalls gleich.

Für den betrachteten Prozess ist das Impulsquadrat des W -Bosons stets negativ. Alle vier Diagramme können somit dem t -Kanal zugeordnet werden. Dies ist bei anderen Prozessen der Produktion von einzelnen Top-Quarks im Allgemeinen nicht der Fall. In Abb. 2.2c werden zwei Diagramme des gekreuzten Prozesses $ug \rightarrow t\bar{b}d$ gezeigt. Für die Diagramme \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 mit der Abstrahlung des Gluons von der leichten Quark-Linie ist das Impulsquadrat des W -Bosons stets positiv. Dies entspricht einer Zuordnung zum s -Kanal. Die Diagramme \mathcal{A}_3 und \mathcal{A}_4 mit der Abstrahlung des Gluons von der schweren Quark-Linie gehören hingegen zum t -Kanal.

Farbalgebra

Die beiden Diagramme mit gleicher Farbstruktur werden jeweils zusammengefasst,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 &= \delta_{bt} T_{du}^g \mathcal{A}_{\text{Born}}^l \text{ und} \\ \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 &= \delta_{ud} T_{tb}^g \mathcal{A}_{\text{Born}}^s.\end{aligned}$$

Dies erlaubt die Zerlegung

$$\mathcal{A}_{\text{Born}} = \delta_{bt} T_{du}^g \mathcal{A}_{\text{Born}}^l + \delta_{ud} T_{tb}^g \mathcal{A}_{\text{Born}}^s$$

in Diagramme mit Abstrahlung des Gluons von der Fermionlinie aus masselosen Quarks $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ (leichte Quark-Linie) und in Diagramme mit Abstrahlung des Gluons von der Fermionlinie mit dem Top-Quark $\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$ (schwere Quark-Linie). Im Betragsquadrat

$$|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{Born}}^l & \mathcal{A}_{\text{Born}}^s \end{pmatrix}^* C_{\text{Born}} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{Born}}^l \\ \mathcal{A}_{\text{Born}}^s \end{pmatrix}$$

wird gemäß Anhang A.1 über Farbindices summiert. Die Farbmatrix

$$C_{\text{Born}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

hat die Einträge

$$\begin{aligned}C_{11} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{du}^g \delta_{bt}) \\ C_{12} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{tb}^g \delta_{ud}) \\ C_{21} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{du}^g \delta_{bt}) \text{ und} \\ C_{22} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{tb}^g \delta_{ud}).\end{aligned}$$

Die Elemente C_{12} und C_{21} der Farbmatrix verschwinden wegen der Spurlosigkeit der Generatoren, $\delta_{ud} T_{du}^g = \text{Sp}(T^g) = 0 = \delta_{bt} T_{tb}^g$. Nach der Ausführung der Farbalgebra, siehe Anhang A.2, folgt

$$C_{\text{Born}} = N_C^2 C_F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

für die Farbmatrix. Der Interferenzterm $2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s]$ wird daher für den Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung nicht benötigt. Zur Berechnung der nächstführenden Ordnung werden im Abschnitt 3.3.2 jedoch farbkorrelierte Matrixelemente eingeführt, die eine nicht diagonale Farbmatrix haben und somit den Interferenzterm benötigen. Der Interferenzterm wird daher im Folgenden mitberechnet.

Berechnung des Betragsquadrats

Zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten werden nun $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2$ und $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2$ benötigt. Es wird ebenfalls $2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s]$ berechnet. Mit den eingeführten Abkürzungen gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2 &= |V_m|^2 \frac{|N_2^Q|^2 |T_1|^2 + |N_1^Q|^2 |T_2|^2 + |N_1^Q N_2^Q| [T_1 T_2^* + T_1^* T_2]}{\left[N_1^Q N_2^Q N_1^W\right]^2}, \\ |\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2 &= |V_m|^2 \frac{|N_4^Q|^2 |T_3|^2 + |N_3^Q|^2 |T_4|^2 + |N_3^Q N_4^Q| [T_3 T_4^* + T_3^* T_4]}{\left[N_3^Q N_4^Q N_3^W\right]^2} \text{ und} \\ 2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s] &= |V_m|^2 \frac{|N_2^Q N_4^Q| [T_1 T_3^* + T_3^* T_1] + |N_2^Q N_3^Q| [T_1 T_4^* + T_1^* T_4]}{|N_1^Q N_2^Q N_3^Q N_4^Q N_1^W N_3^W|} \\ &\quad + |V_m|^2 \frac{|N_1^Q N_4^Q| [T_2 T_3^* + T_2^* T_3] + |N_1^Q N_3^Q| [T_2 T_4^* + T_2^* T_4]}{|N_1^Q N_2^Q N_3^Q N_4^Q N_1^W N_3^W|}. \end{aligned}$$

Zur Mittlung über die Spins und die Farben der einlaufenden Quarks wurde

$$|V_m|^2 = \frac{|V|^2}{36} = \frac{\alpha_s \pi g_w^4}{36}$$

eingeführt. Nun müssen die Zähler und die Nenner in

$$|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2 = |V_m|^2 \frac{Z_l}{N_l}, |\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2 = |V_m|^2 \frac{Z_s}{N_s} \text{ und } 2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s] = |V_m|^2 \frac{Z_m}{N_m}$$

berechnet werden.

Leichte Quark-Linie

Für die Auswertung der Spuren aus Spinoren und Dirac-Matrizen wird exemplarisch

$$|T_1|^2 = \text{Sp} \left[(\not{q}_2 + m_t) \gamma^\mu P_L \not{p}_2 P_R \gamma^{\mu'} \right] \text{Sp} \left[\not{q}_1 \gamma_\mu P_L (\not{p}_1 - \not{q}_3) \gamma^\alpha \not{p}_1 \gamma^{\alpha'} (\not{p}_1 - \not{q}_3) P_R \gamma_{\mu'} \right] \epsilon_\alpha(q_3) \epsilon_{\alpha'}^*(q_3)$$

angegeben. Die Summation über die zwei Polarisierungen eines auslaufenden Gluons mit Impuls p und Polarisationsvektor ϵ erfolgt durch

$$\sum_{\{+,-\}} \epsilon_\alpha^*(p) \epsilon_\beta(p) = -g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha n_\beta + n_\alpha p_\beta}{pn} - \frac{n^2 p_\alpha p_\beta}{(pn)^2},$$

hierbei ist n mit $(pn) \neq 0$ ein beliebiger Hilfsvektor. Für eichinvariante Ausdrücke muss die Abhängigkeit vom Vektor n verschwinden. Zunächst wird nur die Metrik in der Polarisationssumme berücksichtigt. Die Auswertung der Spuren in $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2$ mit FORM ergibt

$$\begin{aligned} |T_1|^2 &= 64(p_1 q_3)(p_2 q_3)(q_2 q_1), \\ |T_2|^2 &= 64(p_1 p_2)(q_2 q_3)(q_1 q_3) \text{ und} \\ [T_1 T_2^* + T_1^* T_2] &= 64 \{ (p_1 p_2) [(p_1 q_2)(q_1 q_3) - 2(p_1 q_1)(q_2 q_1) - (p_1 q_1)(q_2 q_3) - (p_1 q_3)(q_2 q_1) \\ &\quad + (q_2 q_1)(q_1 q_3)] + (q_1 q_2) [(p_1 q_1)(p_2 q_3) - (p_1 q_3)(p_2 q_1)] \}. \end{aligned}$$

Zur Berücksichtigung der gesamten Polarisationssumme ist es hilfreich, das Ergebnis für

$$Z_l = (q_1 + q_3)^4 |T_1|^2 + (p_1 - q_3^2)^4 |T_2|^2 + (q_1 + q_3)^2 (p_1 - q_3)^2 [T_1 T_2^* + T_1^* T_2]$$

durch linear unabhängige skalare Größen auszudrücken. Die Impulserhaltung erlaubt die Elimination des Impulses des Top-Quarks, $q_2 = p_1 + p_2 - q_1 - q_3$. Die sechs Lorentz-Invarianten $s_1 = 2(p_1 p_2)$, $s_2 = 2(p_1 q_1)$, $s_3 = 2(p_1 q_3)$, $s_4 = 2(p_2 q_1)$, $s_5 = 2(p_2 q_3)$ und $s_6 = 2(q_1 q_3)$ sind wegen

$$q_2^2 = m_t^2 = (p_1 + p_2 - q_1 - q_3)^2 = s_1 - s_2 - s_3 - s_4 - s_5 + s_6$$

linear abhängig. Nach Elimination einer Variablen mit dieser Beziehung verbleiben 5 linear unabhängige kinematische Variablen. Nach Elimination von s_5 gilt für den Zähler von $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2$ bei Berücksichtigung der gesamten Polarisationssumme

$$\begin{aligned} Z_l &= 8 \left[m_t^2 Z_l^{(2)} + Z_l^{(0)} \right], \\ Z_l^{(2)} &= s_3 s_6 \left[s_6^2 - s_4 s_6 - 2s_2 s_6 + s_2 s_4 + s_2^2 - s_1 s_3 - s_1 s_2 \right] \text{ und} \\ Z_l^{(0)} &= s_3 s_6 \left[s_2 s_4^2 + 2s_2^2 s_4 + s_2^3 + s_1^2 s_2 \right] \\ &+ s_3 s_6^2 \left[-s_4^2 - 4s_2 s_4 - 3s_2^2 - s_1^2 + 2s_4 s_6 + 3s_2 s_6 - s_6^2 \right] \\ &+ s_3^2 s_6 \left[s_4^2 + 2s_2 s_4 + s_2^2 + s_1^2 - 2s_4 s_6 - 2s_2 s_6 + s_6^2 \right]. \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit vom Hilfsvektor zeigt, dass $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ eine eichinvariante Größe ist. Der Nenner

$$\begin{aligned} N_l &= (p_1 - q_3)^4 (q_1 + q_3)^4 \left[(q_2 - p_2)^2 - m_w^2 \right]^2 \\ &= s_3^2 s_6^2 \left[(p_1 - q_1 - q_3)^2 - m_w^2 \right]^2 \\ &= s_3^2 s_6^2 \left[s_6 - s_2 - s_3 - m_w^2 \right]^2 \end{aligned}$$

kann ebenfalls durch die neuen Variablen ausgedrückt werden.

Mischterm

Der Mischterm wird analog zu Z_l und N_l berechnet. Für ein kompaktes Ergebnis wurde s_2 eliminiert. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} Z_m &= 8 \left[m_t^4 Z_m^{(4)} + m_t^2 Z_m^{(2)} + Z_m^{(0)} \right], \\ Z_m^{(4)} &= s_5 \left[s_3 s_5 + s_5 s_6 - s_3 s_6 + s_3^2 - 2s_1 s_6 - 2s_1 s_3 \right], \\ Z_m^{(2)} &= s_5^2 \left[s_3 s_4 + 4s_3^2 - 5s_1 s_3 + s_4 s_6 + s_3 s_6 - 5s_1 s_6 - s_6^2 + 2s_3 s_5 + 2s_5 s_6 \right] \\ &+ s_5 \left[2s_3^2 s_4 + 2s_3^3 - 2s_1 s_3 s_4 - 5s_1 s_3^2 + 4s_1^2 s_3 - s_3^2 s_6 - 2s_1 s_4 s_6 + 4s_1^2 s_6 \right] \\ &+ s_6 \left[s_1 s_3 s_6 - 2s_1^2 s_6 - s_3^2 s_4 + 2s_1 s_3 s_4 - s_1 s_3^2 + 2s_1^2 s_3 - s_3 s_5 s_6 + 3s_1 s_5 s_6 \right] \\ &+ \left[s_3^3 s_4 - 2s_1 s_3^2 s_4 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_m^{(0)} &= s_1 s_5^2 [3s_6^2 - 2s_4 s_6 - 5s_3 s_6 - 2s_3 s_4 - 6s_3^2 - 3s_5 s_6 - 3s_3 s_5] \\
&+ s_1 [s_3^2 s_6^2 + 2s_3^2 s_4 s_6 - s_3^3 s_6 - 2s_3^3 s_4 - 2s_1 s_3 s_6^2 - 2s_1 s_3 s_4 s_6 + 2s_1 s_3^2 s_6 + 2s_1 s_3^2 s_4] \\
&+ s_5 [s_3^4 + 3s_3^3 s_4 - s_3^2 s_4 s_6 - s_3^2 s_6^2 + 4s_1 s_3 s_6^2 - 3s_1 s_3^2 s_6 - 4s_1 s_3^2 s_4 - 3s_1 s_3^3] \\
&+ s_1^2 s_5 [4s_5 s_6 + 4s_3 s_5 - 4s_6^2 + 2s_4 s_6 + 4s_3 s_6 + 2s_3 s_4 + 4s_3^2] \\
&+ s_5^3 [s_5 s_6 + s_3 s_5 - s_6^2 + s_4 s_6 + 2s_3 s_6 + s_3 s_4 + 3s_3^2] \\
&+ s_5^2 [3s_3^3 + 3s_3^2 s_4 + s_3^2 s_6 + s_3 s_4 s_6 - 2s_3 s_6^2] \\
&+ s_1^3 [2s_6^2 - 2s_3 s_6 - 2s_5 s_6 - 2s_3 s_5] \\
&+ s_3^3 [s_3 s_4 - s_4 s_6] \text{ und} \\
N_m &= (p_1 - q_3)^2 (q_1 + q_3)^2 (p_2 - q_3)^2 (q_2 + q_3)^2 [(q_2 - p_2)^2 - m_w^2] [(q_1 - p_1)^2 - m_w^2] \\
&= s_3 s_5 s_6 [s_3 + s_4 + s_5 - s_1 - s_6 + m_t^2 - m_w^2] [s_4 + s_5 - s_1 + m_t^2 - m_w^2].
\end{aligned}$$

Schwere Quark-Linie

Für ein kompaktes Ergebnis wurde der Impuls p_1 des Up-Quarks eliminiert. Die neuen kinematischen Variablen lauten $s_2 = 2(p_2 q_2)$, $s_3 = 2(p_2 q_3)$, $s_4 = 2(q_1 q_2)$, $s_5 = 2(q_1 q_3)$ und $s_6 = 2(q_2 q_3)$. Es wurde

$$s_1 = (p_2 + q_1)^2 = m_t^2 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5 + s_6$$

eliminiert. In diesen neuen Variablen gilt

$$\begin{aligned}
Z_s &= 8 [m_t^4 Z_s^{(4)} + m_t^2 Z_s^{(2)} + Z_s^{(0)}], \\
Z_s^{(4)} &= -s_3 [s_6^2 + 2s_5 s_3 + 2s_3 s_4], \\
Z_s^{(2)} &= s_6^2 [s_2 s_3 + s_3^2 - 3s_3 s_4 - 2s_3 s_5 - 2s_3 s_6] \\
&+ s_3 [2s_2 s_4 s_6 + s_2 s_5 s_6 + s_3 s_4 s_6 - s_3 s_5 s_6 - 2s_3 s_5^2 - 4s_3 s_4 s_5 - 2s_3 s_4^2], \\
Z_s^{(0)} &= s_6^3 [s_2 s_3 + s_3^2 - 2s_3 s_4 - 2s_3 s_5 - s_3 s_6] \\
&+ s_6^2 [2s_2 s_3 s_4 + 2s_2 s_3 s_5 + 2s_3^2 s_4 + 2s_3^2 s_5 - 2s_3 s_4^2 - 2s_3 s_4 s_5 - s_3 s_5^2] \\
&+ s_6 [s_3^2 s_5^2 + 2s_3^2 s_4 s_5 + 2s_3^2 s_4^2 + s_2 s_3 s_5^2 + 2s_2 s_3 s_4 s_5 + 2s_2 s_3 s_4^2] \text{ und} \\
N_s &= (p_2 - q_3)^4 (q_2 + q_3)^4 [(q_1 - p_1)^2 - m_w^2]^2 \\
&= s_3^2 s_6^2 [-s_2 - s_3 + s_6 + m_t^2 - m_w^2]^2.
\end{aligned}$$

Zusammenfassung des Ergebnisses für $ub \rightarrow dtg$

Mit den Einträgen der Farbmatrix gilt

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 &= 12 [|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2 + |\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2] \text{ mit} \\
|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2 &= \frac{\alpha_s \pi g_w^4}{36} \frac{Z_l}{N_l} \text{ und} \\
|\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2 &= \frac{\alpha_s \pi g_w^4}{36} \frac{Z_s}{N_s}.
\end{aligned}$$

Die Größen Z_l , Z_s , N_l und N_s wurden in diesem Abschnitt angegeben. Die angegebenen Ergebnisse wurden numerisch implementiert und durch externe Vergleiche mit [12] validiert, siehe Abschnitt 3.4.2. Die bei der Berechnung der nächstführenden Ordnung

auf tretenden farbkorrelierten Matrixelemente (Unterabschnitt 3.3.2) können durch Modifikation der Farbmatrix berechnet werden. Bei der numerischen Berechnung der reellen Korrekturen, einem der beiden Hauptbestandteile der Berechnung der Korrekturen in nächstführender Ordnung, erfolgt eine hohe Anzahl an Aufrufen von farbkorrelierten Matrixelementen. Mit der effizienten numerischen Implementierung von $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2$, $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2$ und von $2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s]$ wurde somit eine wichtige Voraussetzung zur Berechnung der reellen Korrekturen erfüllt.

Betragsquadrate der Amplituden für weitere Prozesse

Es wurde für den Prozess $ub \rightarrow dtg$ das Betragsquadrat der Amplitude

$$|\mathcal{A}|_{u(p_1)b(p_2) \rightarrow d(q_1)t(q_2)g(q_3)}^2 =: |\mathcal{A}|_{ub \rightarrow dtg}^2 = |\mathcal{A}|^2(p_1, p_2, q_1, q_2, q_3)$$

berechnet. Durch Kreuzen und Umordnen der Impulse folgen nun alle Prozesse mit gleichen externen Teilchen. Die Reihenfolge der Teilchen wird nun so gewählt, dass der Impuls q_1 stets zum Top-Quark gehört, z. B. $|\mathcal{A}|_{bd \rightarrow t\bar{u}g}^2 := |\mathcal{A}|_{b(p_1)\bar{d}(p_2) \rightarrow t(q_1)\bar{u}(q_2)g(q_3)}^2$. Falls kein Gluon in den Anfangszustand gekreuzt wird, bleibt der Faktor aus der Farbmittlung gleich und es gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|_{ub \rightarrow tdg}^2 &= |\mathcal{A}|_{\bar{u}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}g}^2 = |\mathcal{A}|^2(p_1, p_2, q_2, q_1, q_3), \\ |\mathcal{A}|_{bu \rightarrow tdg}^2 &= |\mathcal{A}|_{b\bar{u} \rightarrow \bar{t}\bar{d}g}^2 = |\mathcal{A}|^2(p_2, p_1, q_2, q_1, q_3), \\ |\mathcal{A}|_{ud \rightarrow t\bar{b}g}^2 &= |\mathcal{A}|_{\bar{u}d \rightarrow \bar{t}bg}^2 = |\mathcal{A}|^2(p_1, -q_2, -p_2, q_1, q_3), \\ |\mathcal{A}|_{du \rightarrow t\bar{b}g}^2 &= |\mathcal{A}|_{d\bar{u} \rightarrow \bar{t}bg}^2 = |\mathcal{A}|^2(p_2, -q_2, -p_0, q_1, q_3), \\ |\mathcal{A}|_{db \rightarrow t\bar{u}g}^2 &= |\mathcal{A}|_{\bar{d}b \rightarrow \bar{t}ug}^2 = |\mathcal{A}|^2(-q_2, p_2, -p_1, q_1, q_3) \text{ und} \\ |\mathcal{A}|_{bd \rightarrow t\bar{u}g}^2 &= |\mathcal{A}|_{b\bar{d} \rightarrow \bar{t}ug}^2 = |\mathcal{A}|^2(-q_2, p_1, -p_2, q_1, q_3). \end{aligned}$$

Bei einem Gluon im Anfangszustand gibt es einen anderen Faktor für die Farbmittlung. Mit $M_g = \frac{3}{8}$ gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|_{gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}}^2 &= |\mathcal{A}|_{g\bar{u} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{b}}^2 = M_g |\mathcal{A}|^2(p_2, -q_3, q_2, q_1, -p_1), \\ |\mathcal{A}|_{ug \rightarrow t\bar{d}\bar{b}}^2 &= |\mathcal{A}|_{\bar{u}g \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{b}}^2 = M_g |\mathcal{A}|^2(p_1, -q_3, q_2, q_1, -p_2), \\ |\mathcal{A}|_{gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}}^2 &= |\mathcal{A}|_{g\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}}^2 = M_g |\mathcal{A}|^2(-q_3, p_2, q_2, q_1, -p_1), \\ |\mathcal{A}|_{bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}}^2 &= |\mathcal{A}|_{b\bar{g} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}}^2 = M_g |\mathcal{A}|^2(-q_3, p_1, q_2, q_1, -p_2), \\ |\mathcal{A}|_{gd \rightarrow t\bar{u}\bar{b}}^2 &= |\mathcal{A}|_{g\bar{d} \rightarrow \bar{t}\bar{u}\bar{b}}^2 = M_g |\mathcal{A}|^2(-q_2, -q_3, -p_2, q_1, -p_1) \text{ und} \\ |\mathcal{A}|_{dg \rightarrow t\bar{u}\bar{b}}^2 &= |\mathcal{A}|_{d\bar{g} \rightarrow \bar{t}\bar{u}\bar{b}}^2 = M_g |\mathcal{A}|^2(-q_2, -q_3, -p_1, q_1, -p_2). \end{aligned}$$

Die angegebenen Betragsquadrate der ladungskonjugierten Prozesse folgen aus Symmetrieüberlegungen. Ausgangspunkt ist die CP-Invarianz der berechneten Prozesse. Diese folgt, da die CP-verletzende Phase in der CKM-Matrix nicht in der Rechnung vorkommt. Diese komplexe Phase ist die einzige Quelle für CP-Verletzung in störungstheoretischen Rechnungen im SM. Die Anwendung der P-Transformation

$$p = (E_p, p_1, p_2, p_3) \rightarrow p^P = (E_p, -p_1, -p_2, -p_3)$$

entspricht dem Umdrehen aller räumlichen Impulse, während die Anwendung der C-Transformation der Vertauschung von Quarks und Antiquarks entspricht. Aus der CP-Invarianz folgt dann

$$|\mathcal{A}|_{ub \rightarrow tdg}^2(p_u^P, p_b^P, p_t^P, p_d^P, p_g^P) = |\mathcal{A}|_{\bar{u}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}g}^2(p_u, p_b, p_t, p_d, p_g), \quad (2.3)$$

allgemein kann der ladungskonjugierte Prozess durch Auswertung mit paritätstransformierten Impulsen bestimmt werden.

Für Born-Amplituden gilt sogar

$$|\mathcal{A}|_{ub \rightarrow tdg}^2(p_u, p_b, p_t, p_d, p_g) = |\mathcal{A}|_{\bar{u}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}g}^2(p_u, p_b, p_t, p_d, p_g), \quad (2.4)$$

da die Lorentz-Invarianten s_1 bis s_6 invariant unter Paritätstransformation sind, somit auch die Betragsquadrate der Born-Amplituden. Für die in den Korrekturen nächstführender Ordnung auftretenden Einschleifen-Amplituden gilt im Allgemeinen nur Gl. (2.3), es muss daher eine Paritätstransformation durchgeführt werden, dies ist numerisch einfach implementierbar.

Resonante Diagramme im Prozess $gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$

Es sei p_w der Impuls des virtuellen W -Bosons. Die Diagramme lassen sich durch das Vorzeichen von p_w^2 in s - und t -Kanal Diagramme unterscheiden. Der Fall $p_w^2 > 0$ entspricht dem s -Kanal und der Fall $p_w^2 < 0$ dem t -Kanal. Während beim Anfangszustand $u\bar{d}$ alle Diagramme dem s -Kanal zugeordnet sind, haben die Prozesse mit einem Gluon im Anfangszustand Beiträge, die nicht zum s -Kanal gehören. Die t -Kanal Diagramme können wegen $p_w^2 < 0$ offensichtlich nicht zu $p_w^2 = m_w^2$, einem auf der Massenschale liegenden W -Boson, führen (Abb. 2.3a). Bei s -Kanal Diagrammen hängt dies von den auslaufenden Teilchen ab. Koppelt das virtuelle W -Boson an ein auslaufendes $t\bar{b}$ Paar, so gilt $p_w^2 > m_t^2 > m_w^2$ (Abb. 2.3c). Bei der Kopplung an ein auslaufendes $u\bar{d}$ Paar ist $p_w^2 = m_w^2$ jedoch kinematisch möglich (Abb. 2.3b).

Tatsächlich ist $W^-(p_w) \rightarrow d(p_d)\bar{u}(p_u)$ ein Zerfallskanal des W -Bosons. Für ein virtuelles W -Boson und auslaufende Quarks ($p_u^2 = p_d^2 = 0$) wird der Propagator des virtuellen W -Bosons

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p_w^2 - m_w^2 + i0} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_u + p_d)^2 - m_w^2 + i0}$$

für Phasenraumpunkte mit $(p_u + p_d)^2 \approx m_w^2$ resonant. Dies entspricht der Produktion eines W -Bosons mit anschließendem hadronischem Zerfall. Der dominante Anteil des Beitrags aus s -Kanal Diagrammen in $gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ und $bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ entspricht daher der Produktion eines Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson mit anschließendem Zerfall des W -Bosons, $b + g \rightarrow t + W^- \rightarrow t + (d + \bar{u})$. Es ist daher konsistent, die resonanten Diagramme aus der Rechnung zur Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets zu entfernen. Die entsprechenden Beiträge müssen dann in der Rechnung zur Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson berücksichtigt werden. Die Zuordnung der Diagramme von allen Prozessen zum s - und t -Kanal der Einzelproduktion und zur Produktion in Assoziation mit einem W -Boson ist in Tabelle 2.2 zusammenfassend dargestellt.

Da der Interferenzterm durch die Farbalgebra verschwindet und die Teilamplituden $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ und $\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$ jeweils einzeln eichinvariant sind, können resonante und nicht resonante

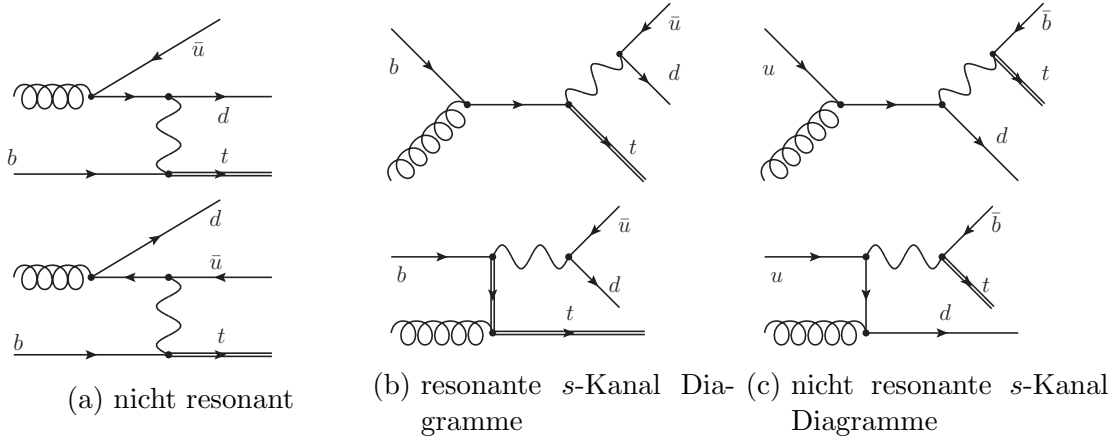


Abbildung 2.3: Diagramme aus Prozessen mit einlaufendem Gluon

	$ub \rightarrow tdg$	$u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g$	$\bar{d}b \rightarrow t\bar{u}g$	$gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}$	$gb \rightarrow td\bar{u}$	$g\bar{d} \rightarrow t\bar{b}\bar{u}$
$\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$	t	s	t	s	t	s
$\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$	t	s	t	t	tW	t

Tabelle 2.2: Zuordnung der Diagramme

Diagramme in führender Ordnung konsistent getrennt werden. In dieser Arbeit wird daher im Folgenden

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{gb \rightarrow td\bar{u}}^2| &= |\mathcal{A}_{g\bar{b} \rightarrow t\bar{d}u}^2| = [M_g |\mathcal{A}|^2(-q_3, p_2, q_2, q_1, -p_1)]_{\mathcal{A}_{\text{Born}}^s=0} \text{ und} \\
|\mathcal{A}_{bg \rightarrow td\bar{u}}^2| &= |\mathcal{A}_{b\bar{g} \rightarrow t\bar{d}u}^2| = [M_g |\mathcal{A}|^2(-q_3, p_1, q_2, q_1, -p_2)]_{\mathcal{A}_{\text{Born}}^s=0}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

verwendet. Die Frage der Behandlung von resonanten Diagrammen wird sich bei der Berechnung der Korrekturen in nächstführender Ordnung der QCD erneut stellen.

2.4 Hadronische und partonische Wirkungsquerschnitte

Der partonische Wirkungsquerschnitt

$$\hat{\sigma}(\hat{s}) = \frac{1}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n)} |\mathcal{A}|^2(p_1, p_2, q_1, \dots, q_n) F_J^{(n)}(q_1, \dots, q_n) \tag{2.6}$$

folgt aus dem berechneten Betragsquadrat der Amplitude nach Integration über den Phasenraum

$$d\Phi^{(n)} = \left(\prod_{f=1}^n \frac{d^3 q_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_f^0} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_{f=1}^n q_f)$$

der n auslaufenden Teilchen. In einfachen Fällen ist die Wahl $F_J^{(n)} = 1$ für die Jet-Funktion möglich. Mit dieser Wahl wird der inklusive Wirkungsquerschnitt berechnet. Im Allgemeinen geht in $F_J^{(n)}$ ein Jet-Algorithmus ein, der die n auslaufenden Partonen zu $m \leq n$

auslaufenden Jets rekombiniert. $F_J^{(n)}$ nimmt im Integral aus Gl. (2.6) in Abhängigkeit von m die Werte 0 oder 1 an.

Bei Leptonen im Anfangszustand ergibt sich an einem Teilchenbeschleuniger mit der Luminosität L und der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} eine Ereignisrate von $\dot{N} = \hat{\sigma}(s)L = \sigma(s)L$, eine Unterscheidung zwischen σ und $\hat{\sigma}$ ist nicht notwendig. Bei der Kollision von Hadronen muss hingegen zwischen dem (hadronischen) Wirkungsquerschnitt σ und dem partonischen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ unterschieden werden. In die Berechnung der Ereignisrate geht der hadronische Wirkungsquerschnitt σ ein. Die Formel für partonische Wirkungsquerschnitte wird nun für $n = 2$ und $n = 3$ auslaufende Teilchen betrachtet.

Zwei auslaufende Teilchen

Für die Erzeugung einzelner Top-Quarks ist in führender Ordnung die Wahl $F_J^{(2)} = 1$ möglich, da die Impulse der beiden auslaufenden Teilchen in ihrem Schwerpunktsystem entgegengesetzte Richtungen haben müssen. Eine Integration über den gesamten Phasenraum mit

$$d\Phi^{(2)} = d\Omega \frac{|\vec{q}_1|}{16\pi^2 \sqrt{\hat{s}}}$$

ist möglich. Als einfaches Beispiel wird zunächst der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ betrachtet, für dessen über die Spins gemitteltes Betragsquadrat der Amplitude $|\mathcal{A}_2|^2 = e^4 [1 + \cos^2 \theta]$ gilt. Es wird sowohl die Masse des Elektrons als auch des Muons vernachlässigt. Für den Wirkungsquerschnitt folgt

$$\sigma_{\mu^+\mu^-} = \frac{e^4}{64\pi^2 s} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^4 [1 + \cos^2 \theta] = \frac{e^4}{12\pi s} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Für die Erzeugung einzelner Top-Quarks in der Ordnung $O(G_F^2)$ ist die Integration über den Phasenraum ebenfalls analytisch möglich [36]. Ausgehend von Gl. (2.2) folgt

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ub \rightarrow dt}(\hat{s}) &= |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2 \frac{g_w^4}{64\pi m_w^2} \frac{(\hat{s} - m_t^2)^2}{\hat{s}(\hat{s} + m_w^2 - m_t^2)}, \\ \hat{\sigma}_{\bar{d}b \rightarrow \bar{u}t}(\hat{s}) &= |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2 \frac{g_w^4}{64\pi} \frac{1}{\hat{s}^2} \left[(\hat{s} - m_t^2) \left(2 + \frac{\hat{s}}{m_w^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (2(m_w^2 + \hat{s}) - m_t^2) \ln \left(\frac{m_w^2}{\hat{s} + m_w^2 - m_t^2} \right) \right] \text{ und} \\ \hat{\sigma}_{u\bar{d} \rightarrow \bar{b}t}(\hat{s}) &= |V_{tb}|^2 |V_{ud}|^2 \frac{g_w^4}{384\pi} \frac{(m_t^2 + 2\hat{s})(\hat{s} - m_t^2)^2}{\hat{s}^2(\hat{s} - m_w^2)^2} \end{aligned}$$

für die partonischen Wirkungsquerschnitte. Die Produktionsschwelle liegt in allen drei Fällen bei $\hat{s} = m_t^2$. Im Grenzfall großer partonischer Schwerpunktsenergien konvergiert der partonische Wirkungsquerschnitt der Prozesse $ub \rightarrow dt$ und $\bar{d}b \rightarrow \bar{u}t$ gegen den gleichen Grenzwert. Der partonische Wirkungsquerschnitt des s -Kanal Prozesses $u\bar{d} \rightarrow \bar{b}t$ fällt hingegen analog zum Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mit $\frac{1}{\hat{s}}$ ab.

Drei auslaufende Teilchen

Drei auslaufende Teilchen können im Allgemeinen nicht in allen Bereichen des Phasenraumes einzeln aufgelöst beobachtet werden. Dies soll am Beispiel $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ verdeutlicht

werden. Bei einem Paar aus Quark und Antiquark im Endzustand folgt aus der Produktion von Muon Paaren

$$\hat{\sigma}_{2j} = N_C \left(\sum_i Q_i^2 \right) \frac{4\pi\alpha^2}{3s},$$

wobei über alle Flavour hinreichend leichter Quarks summiert wird. Das über Spins gemittelte Betragsquadrat der Amplitude für $e^+(p_1)e^-(p_2) \rightarrow q(k_1) + \bar{q}(k_2) + g(k_3)$ ist durch

$$|\mathcal{A}_3|^2 = 24C_F \sum_i Q_i^2 \alpha^2 \alpha_s (4\pi)^3 \frac{(p_1 k_1)^2 + (p_1 k_2)^2 + (p_2 k_1)^2 + (p_2 k_2)^2}{(p_1 p_2)(k_1 k_3)(k_2 k_3)}$$

gegeben, Gl. (3.10) in [37]. Nach dem Einführen von Variablen $x_i = 2k_i(p_1 + p_2)/s$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ kann der Wirkungsquerschnitt nach dem Ausführen der Integration in drei der fünf Integrationsvariablen als

$$\hat{\sigma}_{3j} = \frac{N_C}{2s} \sum_i Q_i^2 \int d\Phi^{(3)} |\mathcal{A}_3|^2 = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \hat{\sigma}_{2j} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \Theta(x_1 + x_2 - 1) \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$$

geschrieben werden. Weiterhin gilt $(k_2 + k_3)^2 = s(1 - x_1)$ und $(k_1 + k_3)^2 = s(1 - x_2)$. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \Theta(x_1 + x_2 - 1) \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} = \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$$

divergiert im Limes $x_2 \rightarrow 1$ oder $x_1 \rightarrow 1$. Diese Grenzfälle entsprechen $(k_2 + k_3)^2 \rightarrow 0$ bzw. $(k_1 + k_3)^2 \rightarrow 0$ für die externen Impulse. Auf die physikalische Erklärung dieser Divergenzen wird im nächsten Unterabschnitt eingegangen.

Infrarot-Divergenzen und Infrarot-Sicherheit

Allgemein gilt für ein masseloses Quark mit Impuls p_q und ein Gluon mit Impuls p_g

$$(p_q + p_g)^2 = 2p_q p_g = 2E_q E_g (1 - \cos \theta).$$

Der Fall $E_g \rightarrow 0$ beschreibt ein weiches Gluon und führt beim Auftreten von $1/(p_q + p_g)^2$ in einem Propagator zu einer weichen Divergenz. Der Fall $\theta \rightarrow 0$ entspricht einer kollinearen Divergenz. Beide Fälle können sich überlappen. Für ein massives Quark würde ein weiches Gluon weiterhin zu einer Divergenz führen, während eine kollineare Divergenz nicht mehr möglich ist. Im engeren Sinne werden nur weiche Divergenzen als Infrarot-Divergenzen bezeichnet. In dieser Arbeit werden auch kollineare Divergenzen als Infrarot-Divergenzen im weiteren Sinne aufgefasst.

Die Jet-Funktion F_J muss nun so gewählt werden, dass Infrarot-Sicherheit für observable Größen garantiert ist. Für eine Infrarot-sichere Observable muss

$$\begin{aligned} O_{n+1}(p_1, \dots, p_n, p_s) &\xrightarrow{p_s \rightarrow 0} O_n(p_1, \dots, p_n) \text{ und} \\ O_{n+1}(p_1, \dots, p_i, p_j, \dots) &\xrightarrow{p_i \parallel p_j} O_n(p_1, \dots, (p_i + p_j), \dots) \end{aligned}$$

Pseudorapidity	4,5	3,5	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5
Winkel zur Strahlachse	1,27°	3,46°	9,39°	15,41°	25,16°	40,40°	62,48°

Tabelle 2.3: Veranschaulichung der Pseudorapidity

gelten, die Observable darf nicht sensitiv auf das Entfernen eines weichen Teilchens oder auf das Zusammenfügen zweier kollinear Teilchen sein. Beispiele für derartige Observablen sind inklusive Wirkungsquerschnitte und Jet-Wirkungsquerschnitte. Eine Möglichkeit zur Definition von Infrarot-sicheren Jets ist die Anwendung des Anti- k_T Algorithmus. Zu deren Beschreibung werden nun Größen eingeführt, die ebenfalls als Observablen geeignet sind. Der zur Strahlachse in z-Richtung transversale Impuls eines Teilchens mit Impuls $p = (p_0, p_x, p_y, p_z)$ ist

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}.$$

Die Pseudorapidity

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{|\vec{p}| + p_z}{|\vec{p}| - p_z} \right]$$

beschreibt den Winkel

$$\theta = 2 \arctan(e^{-\eta})$$

zur Strahlachse. In Tabelle 2.3 werden Beispielwerte angegeben. Die Rapidity

$$y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{E + p_z}{E - p_z} \right]$$

ist ähnlich zur Pseudorapidity definiert und stimmt für masselose Teilchen mit der Pseudorapidity überein. Für masselose Teilchen kann der Betrag der Rapidity beliebig groß werden. Für massive Teilchen gilt

$$y^{\max} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{m^2 + p_z^2} + p_z}{\sqrt{m^2 + p_z^2} - p_z} \right]$$

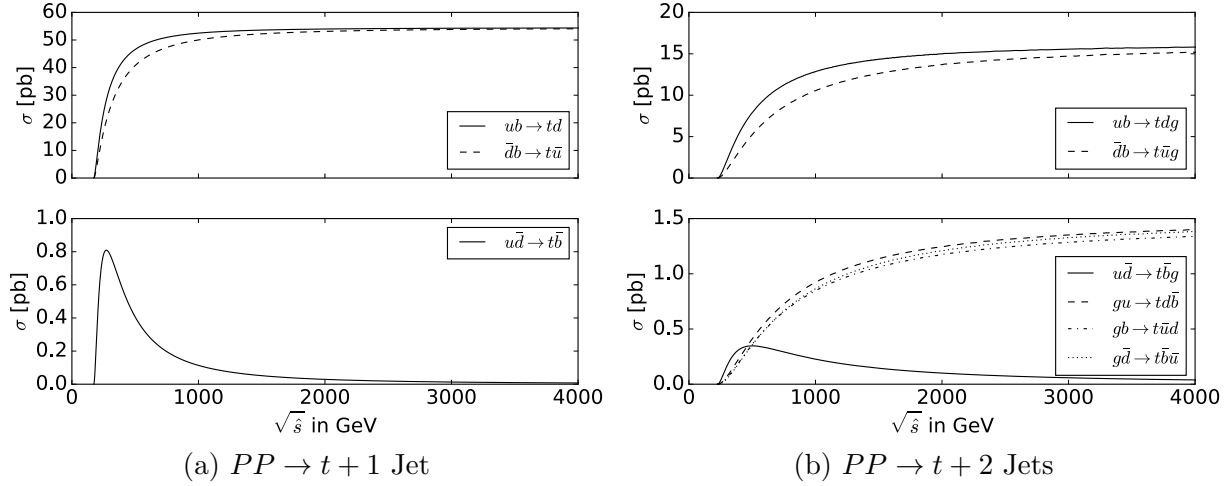
für den maximalen Betrag der Rapidity. Für Top-Quarks folgt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ der Wert $y^{\max} = 4,32$.

Anti- k_T Algorithmus

Der Anti- k_T Algorithmus [38] wird in vielen Analysen von ATLAS und CMS eingesetzt. Eingangsgrößen sind Impulse von Partonen. Für jedes Paar aus Impulsen k_i und k_j werden die Größen

$$d_{ij} = \min(k_{T,i}^{-2}, k_{T,j}^{-2}) \frac{(y_i - y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2}{(R^{\min})^2} \text{ und}$$

$$d_{iB} = k_{T,i}^{-2}$$



Abbildungung 2.4: Partonische Wirkungsquerschnitte

berechnet. Hierbei sind die $k_{T,i}$ transversale Impulse, y_i die Rapiditäten sowie ϕ_i die Azimutwinkel. Der „Abstand“ von der Strahlachse wird durch d_{iB} beschrieben. Ist der kleinste Wert ein d_{ij} , so findet eine Rekombination der Impulse k_i und k_j statt. Ist hingegen d_{iB} der kleinste Wert, so wird ein Jet mit Impuls k_i identifiziert, ausgegeben und von der Liste aus Impulsen entfernt. Die Berechnung der Größen d_{ij} sowie d_{iB} und die folgenden Schritte werden wiederholt, bis die Liste aus Impulsen leer ist. Zur numerischen Auswertung des Anti- k_T Algorithmus wurde das Programm FASTJET [39] eingebunden. Für die Rekombination von Impulsen wurde das E-Schema verwendet, in welchem die Impulse addiert werden, $k_{\text{rek.}} = k_i + k_j$. In diesem Schema liegen die rekombinierten Jets im Allgemeinen nicht mehr auf der Massenschale.

Numerische Ergebnisse

Die Integration über den Phasenraum wurde numerisch mit den Konstanten

$$\begin{aligned} m_t &= 173,21 \text{ GeV}, \\ m_w &= 80,385 \text{ GeV}, \\ G_F &= 1,16638 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \text{ und} \\ \alpha_s &= 0,107609 \end{aligned}$$

durchgeführt. Für die Jet-Funktion wurde der Anti- k_T Algorithmus mit $R^{\min} = 0,4$ eingesetzt. Zusätzlich wird ein minimaler transversaler Impuls $k_T^{\min} = 25 \text{ GeV}$ für alle Jets gefordert. Der Phasenraum wird mit der Routine `eventn` aus [40] erzeugt, die Zufallszahlen durch „sequentielle Abstrahlung“ [41] auf Phasenraumpunkte abbildet. Die numerische Integration über den Phasenraum erfolgt mit dem Monte-Carlo-Integrator VEGAS [42].

In Tabelle 2.4 werden Ergebnisse für zwei verschiedene partonische Schwerpunktsenergien $\sqrt{\hat{s}}$ angegeben. In Abb. 2.4b wird der Verlauf in Abhängigkeit von $\sqrt{\hat{s}}$ gezeigt. Zum Vergleich wird in Abb. 2.4a ebenfalls die auf partonischer Ebene analytisch bekannte Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit einem Jet gezeigt. Auf Ebene des inklusiven partonischen Wirkungsquerschnitts haben $\hat{\sigma}_{ub}$ und $\hat{\sigma}_{db}$ die gleiche Größenordnung, der Unterschied bei $\sqrt{\hat{s}} = 500 \text{ GeV}$ beträgt 34% relativ zu σ_{ub} und sinkt bei $\sqrt{\hat{s}} = 3 \text{ TeV}$

	$\hat{\sigma}_{ub}$	$\hat{\sigma}_{gu}$	$\hat{\sigma}_{gb}$	$\hat{\sigma}_{\bar{d}b}$	$\hat{\sigma}_{g\bar{d}}$	$\hat{\sigma}_{u\bar{d}}$
$\sqrt{\hat{s}} = 500 \text{ GeV}$	7,89 pb	0,41 pb	0,36 pb	5,24 pb	0,36 pb	0,35 pb
$\sqrt{\hat{s}} = 3 \text{ TeV}$	15,56 pb	1,35 pb	1,28 pb	14,71 pb	1,33 pb	0,06 pb

Tabelle 2.4: Vergleich der sechs partonischen Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen partonischen Schwerpunktsenergien

auf 5%. Eine zweite Gruppe von partonischen Wirkungsquerschnitten gleicher Größenordnung wird durch $\hat{\sigma}_{gu}$, $\hat{\sigma}_{g\bar{d}}$ und $\hat{\sigma}_{gb}$ gebildet. Die relativen Unterschiede innerhalb dieser Gruppe sind kleiner als die der beiden dominanten Kanäle. Der partonische Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{u\bar{d}}$ fällt bei hohen Energien ab. Dies ist charakteristisch für einen s -Kanal Prozess. Insgesamt zeigt sich im Vergleich der Abbildungen von $(t + 1 \text{ Jet})$ und $(t + 2 \text{ Jets})$ eine qualitative Ähnlichkeit. Es wird jedoch auf die Abhängigkeit von k_T^{\min} und R^{\min} im Fall von zwei auslaufenden Jets hingewiesen. An späterer Stelle wird zusätzlich ein Schnitt auf die Pseudorapidität der Jets im Laborsystem angelegt. Die Pseudorapidität ist nicht invariant unter Boosts in Richtung der Strahlachse. Der Schnitt auf die Pseudorapidität konnte deswegen an dieser Stelle nicht berücksichtigt werden.

Hadronische Wirkungsquerschnitte

Der hadronische Wirkungsquerschnitt für die Kollision von Protonen

$$\sigma(P_1, P_2) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 f_1^a(x_1, \mu_F) \int_0^1 dx_2 f_2^b(x_2, \mu_F) \hat{\sigma}_{ab}(x_1 P_1, x_2 P_2, \mu_F)$$

folgt gemäß dem Partonmodell der QCD nach Integration über Partonverteilungsfunktionen f_1^a und f_2^b . Die Indices 1 und 2 stehen dabei für das erste und das zweite Proton, während a und b für die an der harten Wechselwirkung teilnehmenden Partonen stehen. Es wird das 5-Flavour-Schema verwendet, daher gilt $a, b \in \{g, q, \bar{q}\}$ mit $q \in \{u, d, c, s, b\}$. In führender Ordnung hängt der partonische Wirkungsquerschnitt nicht von der Faktorisierungsskala μ_F ab. In höherer Ordnung tritt eine explizite Abhängigkeit von μ_F im partonischen Wirkungsquerschnitt auf, welche die Abhängigkeit der Partonverteilungsfunktionen von der Faktorisierungsskala in der entsprechenden Ordnung kompensiert.

Für die Integration über den partonischen Phasenraum ist das partonische Schwerpunktsystem vorteilhaft. Schnitte an den Phasenraum werden typischerweise im Laborsystem angelegt. Die Lorentz-Transformation zum Übergang zwischen diesen Systemen wird nun bestimmt.

Lorentz-Transformation vom Partonsystem zum Laborsystem

An einem Hadronen-Beschleuniger sind die Impulse P_1 und P_2 der einlaufenden Hadronen im durch die Detektoren definierten Laborsystem (LAB) bekannt. Bei symmetrischen Kollisionen, $P_1 = -P_2$ in LAB, stimmt das hadronische Schwerpunktsystem mit dem Laborsystem überein. Weiterhin gibt es ein partonisches Schwerpunktsystem (PCMS). Die Jet-Funktion $F_J^{(n)}$ mit Schnitten an den Phasenraum aus dem Experiment muss mit Impulsen im Laborsystem ausgewertet werden. Es ist daher eine Lorentz-Transformation

zwischen PCMS und LAB erforderlich, diese wird im Folgenden beschrieben. Es sei s_{had} die hadronische und \hat{s} die partonische Schwerpunktsenergie zum Quadrat. In LAB gilt für die einlaufenden Protonen bei Vernachlässigung ihrer Masse

$$P_1 = \frac{\sqrt{s_{\text{had}}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{\sqrt{s_{\text{had}}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } (P_1 + P_2)^2 = s_{\text{had}}. \quad (2.7)$$

Die einzelnen Partonen des Protons tragen einen durch Variablen x_1 und x_2 beschriebenen Impulsbruchteil. In LAB gilt $p_1 = x_1 P_1$ und $p_2 = x_2 P_2$. Daraus folgt

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = 2x_1 x_2 P_1 P_2 = x_1 x_2 s_{\text{had}}.$$

In PCMS gilt für die Impulse der Partonen

$$p_1 = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } (p_1 + p_2)^2 = \hat{s}.$$

Aus der Lorentz-Transformation $E' = \gamma(E - \beta p_z)$ und $p'_z = \gamma(p_z - \beta E)$ für einen Boost entlang der z-Richtung folgt nun

$$\frac{x_1 \sqrt{s_{\text{had}}}}{2} = \gamma \left(\frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} - \beta \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \right) \text{ und damit } \beta = \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}. \quad (2.8)$$

Vorfaktoren aus der CKM-Matrix

Zwischen dem partonischen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{ub}$ mit einem einlaufenden Up-Quark und einem einlaufenden Bottom-Quark und dem berechneten partonischen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{ub \rightarrow tdg}$ ohne Vorfaktoren aus der CKM-Matrix gilt der Zusammenhang

$$\hat{\sigma}_{ub} = |V_{tb}|^2 (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2) \sigma_{ub \rightarrow tdg},$$

da ebenfalls die Prozesse $ub \rightarrow stg$ und $ub \rightarrow btg$ mit gleichem Anfangszustand beitragen. Aus dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{ub \rightarrow dtg}$ folgen wegen der Vernachlässigung der Massen von leichten Quarks auch partonische Wirkungsquerschnitte für weitere Anfangszustände, z. B.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{cb} &= |V_{tb}|^2 (|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2) \sigma_{ub \rightarrow tdg} \text{ und} \\ \hat{\sigma}_{us} &= |V_{ts}|^2 (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2) \sigma_{ub \rightarrow tdg}. \end{aligned}$$

Für den hadronischen Wirkungsquerschnitt folgt

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 [F_{ub} \sigma_{ub \rightarrow tdg} + F_{bu} \sigma_{bu \rightarrow tdg} + F_{u\bar{d}} \sigma_{u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g} + F_{\bar{d}u} \sigma_{\bar{d}u \rightarrow t\bar{b}g} \\ &+ F_{\bar{d}b} \sigma_{\bar{d}b \rightarrow t\bar{u}g} + F_{b\bar{d}} \sigma_{b\bar{d} \rightarrow t\bar{u}g} + F_{gu} \sigma_{gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}} + F_{ug} \sigma_{ug \rightarrow t\bar{d}\bar{b}} \\ &+ F_{gb} \sigma_{gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}} + F_{bg} \sigma_{bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}} + F_{g\bar{d}} \sigma_{g\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}} + F_{\bar{d}g} \sigma_{\bar{d}g \rightarrow t\bar{u}\bar{b}}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Für die Vorfaktoren gilt

$$\begin{aligned}
F_{ub} &= (f_2^b |V_{tb}|^2 + f_2^s |V_{ts}|^2 + f_2^d |V_{td}|^2) (f_1^u \Omega_u + f_1^c \Omega_c), \\
F_{u\bar{d}} &= f_1^u (f_2^{\bar{d}} |V_{ud}|^2 + f_2^{\bar{s}} |V_{us}|^2 + f_2^{\bar{b}} |V_{ub}|^2) \\
&\quad + f_1^c (f_2^{\bar{d}} |V_{cd}|^2 + f_2^{\bar{s}} |V_{cs}|^2 + f_2^{\bar{b}} |V_{cb}|^2), \\
F_{\bar{d}b} &= (f_2^b |V_{tb}|^2 + f_2^s |V_{ts}|^2 + f_2^d |V_{td}|^2) (f_1^{\bar{d}} \Omega_d + f_1^{\bar{s}} \Omega_s + f_1^{\bar{b}} \Omega_b), \\
F_{gu} &= f_1^g \Omega_t (f_2^u \Omega_u + f_2^c \Omega_c) \\
F_{gb} &= f_1^g (\Omega_u + \Omega_c) (f_2^b |V_{tb}|^2 + f_2^s |V_{ts}|^2 + f_2^d |V_{td}|^2) \text{ und} \\
F_{g\bar{d}} &= f_1^g \Omega_t (f_2^{\bar{d}} \Omega_d + f_2^{\bar{s}} \Omega_s + f_2^{\bar{b}} \Omega_b)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= |V_{xd}|^2 + |V_{xs}|^2 + |V_{xb}|^2 \text{ für } x \in \{u, c\} \text{ und} \\
\Omega_x &= |V_{ux}|^2 + |V_{cx}|^2 \text{ für } x \in \{d, s, b\}.
\end{aligned}$$

Die übrigen Vorfaktoren F_{ij} folgen durch die Ersetzung ($i \leftrightarrow j$). Die Vorfaktoren für die Produktion von Top-Antiquarks folgen durch Ladungskonjugation.

Näherung für die Vorfaktoren

Die Elemente der CKM-Matrix haben die Werte [43]

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97434 & 0,22506 & 0,00357 \\ 0,22492 & 0,97351 & 0,0411 \\ 0,00875 & 0,0403 & 0,99915 \end{pmatrix},$$

es gilt also in grober Näherung $V_{\text{CKM}} \approx I_3$. Zusammen mit den Partonverteilungsfunktionen erlaubt dies das Aufstellen vereinfachter Vorfaktoren. Diese werden an späterer Stelle zu einer Vereinfachung der Korrekturen in der nächstführenden Ordnung der QCD führen, da in den reellen Korrekturen ein zusätzliches auslaufendes Parton auftritt. Die genäherten Vorfaktoren werden im Folgenden begründet. Wegen $|V_{tb}| \approx 1$ ist auch $|V_{tb}|^2 \approx 1$ eine gute Näherung. Zusammen mit der Unitarität von V_{CKM} folgt dann mit $\Omega_u \approx \Omega_c \approx \Omega_t \approx \Omega_d \approx \Omega_s \approx 1$ sowie $\Omega_b \approx 0$ für die Vorfaktoren

$$\begin{aligned}
F_{ub} &\approx (f_1^u + f_1^c) f_2^b, \\
F_{gu} &\approx f_1^g (f_2^u + f_2^c), \\
F_{gb} &\approx 2 f_1^g f_2^b, \\
F_{\bar{d}b} &\approx f_2^b (f_1^{\bar{d}} + f_1^{\bar{s}}), \\
F_{g\bar{d}} &\approx f_1^g (f_2^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}}) \text{ und} \\
F_{u\bar{d}} &\approx f_1^u (f_2^{\bar{d}} |V_{ud}|^2 + f_2^{\bar{s}} |V_{us}|^2) + f_1^c (f_2^{\bar{d}} |V_{cd}|^2 + f_2^{\bar{s}} |V_{cs}|^2).
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor $F_{u\bar{d}}$ erfordert als einziger die weitere Näherung

$$\begin{aligned}
F_{u\bar{d}} &\approx f_1^u \left[f_2^{\bar{d}} (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2) + |V_{us}|^2 (f_2^{\bar{s}} - f_2^{\bar{d}}) \right] \\
&\quad + f_1^c \left[(f_2^{\bar{d}} - f_2^{\bar{s}}) |V_{cd}|^2 + f_2^{\bar{s}} (|V_{cs}|^2 + |V_{cd}|^2) \right] \\
&\approx f_1^u f_2^{\bar{d}} + f_1^c f_2^{\bar{s}}.
\end{aligned}$$

Prozess	Vorfaktor	Prozess	Vorfaktor
$ub \rightarrow tdg$	$f_2^b(f_1^u + f_1^c)$	$\bar{u}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}g$	$\bar{f}_2^b(f_1^{\bar{u}} + f_1^{\bar{c}})$
$u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g$	$f_1^u f_2^{\bar{d}} + f_1^c f_2^{\bar{s}}$	$\bar{u}d \rightarrow \bar{t}bg$	$f_1^{\bar{u}} f_2^d + f_1^{\bar{c}} f_2^s$
$\bar{d}b \rightarrow \bar{t}ug$	$f_2^b(f_1^{\bar{d}} + f_1^{\bar{s}})$	$d\bar{b} \rightarrow \bar{t}ug$	$f_2^b(f_1^d + f_1^s)$
$gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}$	$f_1^g(f_2^u + f_2^c)$	$\bar{g}\bar{u} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{b}$	$f_1^g(f_2^{\bar{u}} + f_2^{\bar{c}})$
$gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$	$2f_1^g f_2^b$	$\bar{g}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}$	$2f_1^g f_2^{\bar{b}}$
$g\bar{d} \rightarrow \bar{t}\bar{u}\bar{b}$	$f_1^g(f_2^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}})$	$gd \rightarrow \bar{t}ub$	$f_1^g(f_2^d + f_2^s)$

Tabelle 2.5: Vorfaktoren der einzelnen Prozesse

Die durch $|V_{us}|^2 \approx |V_{cd}|^2$ unterdrückten Summanden wurden dabei vernachlässigt. Diese sind zusätzlich durch die zugehörigen Partonverteilungsfunktionen unterdrückt. Darüber hinaus ist der zugehörige partonische Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g}$ klein. Die Ergebnisse der Näherung sind in Tabelle 2.5 für die Produktion von einzelnen Top-Quarks und für die Produktion von einzelnen Top-Antiquarks zusammengefasst. Aus der Näherung $V_{CKM} \approx I_3$ folgen die gleichen Vorfaktoren. Die Zulässigkeit der erfolgten Näherung wird am Ende dieses Kapitels ebenfalls numerisch getestet.

Partonverteilungsfunktionen und Luminositätsfunktionen

Die Partonverteilungsfunktionen beschreiben die interne Struktur von Hadronen. Sie können nicht störungstheoretisch berechnet werden. Für Protonen existiert allerdings eine Vielzahl von aus Fits an experimentelle Daten aufgestellten Partonverteilungsfunktionen. In dieser Arbeit werden Partonverteilungsfunktionen und α_s aus PDF4LHC15_nlo_100_pdfas [44] verwendet. PDF4LHC15 besteht aus kombinierten Ergebnissen von MMHT2014 [45], CT14 [46] und NNPDF [47]. Die numerische Auswertung erfolgte mit LHAPDF [48]. In Abb. 2.5 ist der Verlauf der Partonverteilungsfunktionen für die Wahl der Faktorisierungsskala $\mu_F = m_t$ gezeigt. Die Partonverteilungsfunktionen f^u und $f^{\bar{u}}$ sowie f^d und $f^{\bar{d}}$ weichen stark voneinander ab, da das Proton zwei Up-Quarks und ein Down-Quark als Valenzquarks besitzt. Für Strange-, Charm- und Bottom-Quarks sind die Abweichungen der Partonverteilungsfunktionen von denen der zugehörigen Antiquarks minimal.

Der hadronische Wirkungsquerschnitt wird sowohl durch den partonischen Wirkungsquerschnitt als auch durch die Partonverteilungsfunktionen beeinflusst. Zur isolierten Betrachtung des Einflusses der Partonverteilungsfunktionen kann der hadronische Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
\sigma(s_{\text{had}}) &= \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 f_1^a(x_1, \mu_F) \int_0^1 dx_2 f_2^b(x_2, \mu_F) \int_U^{s_{\text{had}}} d\hat{s} \hat{\sigma}_{ab}(\hat{s}) \delta(x_1 x_2 s_{\text{had}} - \hat{s}) \\
&= \sum_{a,b} \int_U^{s_{\text{had}}} d\hat{s} \int_{\hat{s}/s_{\text{had}}}^1 \frac{dx_1}{x_1 s_{\text{had}}} f_1^a(x_1, \mu_F) f_2^b\left(\frac{\hat{s}}{x_1 s_{\text{had}}}, \mu_F\right) \hat{\sigma}_{ab}(\hat{s}) \\
&= \frac{1}{s_{\text{had}}} \sum_{a,b} \int_U^{s_{\text{had}}} d\hat{s} L_{ab}(\hat{s}, \mu_F) \hat{\sigma}_{ab}(\hat{s})
\end{aligned}$$

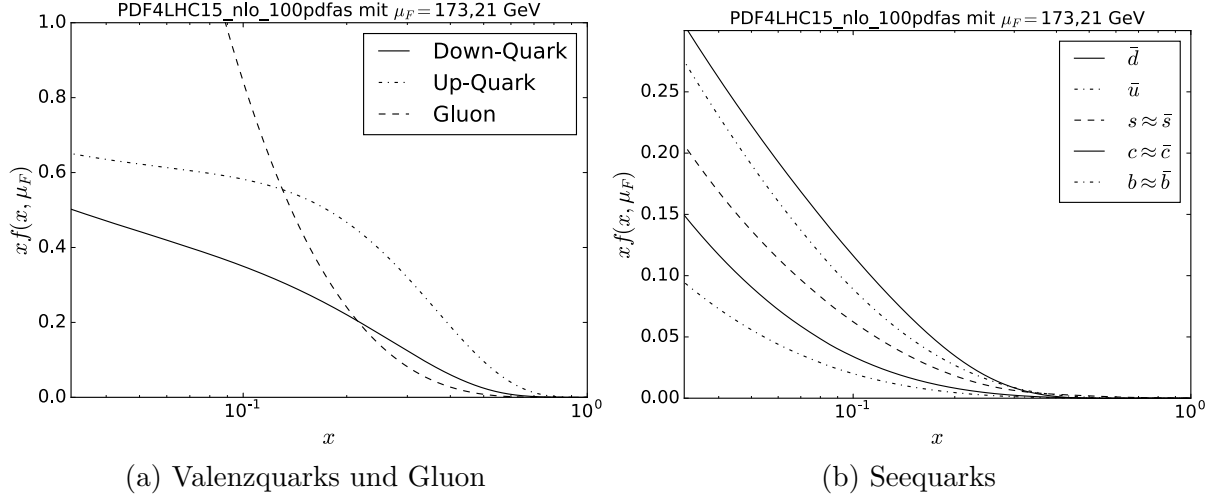


Abbildung 2.5: Partonverteilungsfunktionen

durch Luminositätsfunktion ausgedrückt werden. Für die Erzeugung einzelner Top-Quarks gilt $U = m_t^2$, weiterhin ist $\mu_F = m_t$ eine plausible Wahl für die Faktorisierungsskala. Die dimensionslosen Luminositätsfunktionen

$$L_{ab}(\hat{s}, \mu_F) = \int_{\hat{s}/s_{\text{had}}}^1 \frac{dx}{x} f_1^a(x, \mu_F) f_2^b\left(\frac{\hat{s}}{xs_{\text{had}}}, \mu_F\right)$$

können numerisch für feste Werte von s_{had} und μ_F berechnet werden.

In Tabelle 2.6 sind Werte für die Vorfaktoren aus Gl. (2.9) bei zwei verschiedenen partonischen Schwerpunktsenergien angegeben. In Abb. 2.6 wird der Verlauf der sechs Vorfaktoren in Abhängigkeit der partonischen Schwerpunktsenergie für die Produktion von Top-Quarks und für die Produktion von Top-Antiquarks gezeigt. Bei der t Produktion ist F_{gu} für alle Werte von $\sqrt{\hat{s}}$ dominant. Analog ist F_{gd} bei der \bar{t} Produktion dominant. $F_{g\bar{d}}$ ist bei $\sqrt{\hat{s}} = 500$ GeV und der t Produktion der zweitgrößte Beitrag mit etwa 30% der Größe von F_{gu} . Bei steigender Energie sinkt dieser Anteil, bei $\sqrt{\hat{s}} = 3$ TeV auf ca. 5%. Insgesamt wird der Unterschied zwischen den Anfangszuständen $gu, g\bar{d}$ und gb auf hadronischer Ebene fast vollständig durch die Luminositätsfunktionen bestimmt. Analog führen die Luminositätsfunktion zu einem Unterschied zwischen den Anfangszuständen ub und $\bar{d}b$.

In Abb. 2.6 ist außerdem der Einfluss der Faktorisierungsskala auf die Luminositätsfunktionen der dominanten Kanäle gezeigt. Dafür wurde

$$K_{gu}^+ = F_{gu}(\mu_F = 2m_t)/F_{gu}(\mu_F = m_t) \text{ und } K_{gu}^- = F_{gu}(\mu_F = m_t/2)/F_{gu}(\mu_F = m_t)$$

berechnet. Die Abhängigkeit der Luminositätsfunktionen von der Faktorisierungsskala beträgt bei der Kombination Gluon mit Valenzquark bei $\sqrt{\hat{s}} = 6$ TeV über 20%. Bei F_{ub} gilt bei $\sqrt{\hat{s}} \approx 2$ TeV $K_{ub}^+ = K_{ub}^- = 1$. Bei höheren partonischen Schwerpunktsenergien steigt die relative Skalenunsicherheit, ist aber kleiner als im Fall von F_{gu} . Neben der Faktorisierungsskala hängt der hadronische Wirkungsquerschnitt auch von der Renormierungsskala μ_R ab, bei der die starke Kopplungskonstante $\alpha_s(\mu_R)$ ausgewertet wird. Im Gegensatz zur Abhängigkeit von μ_F ist die relative Abhängigkeit von μ_R für alle Bereiche des Phasenraums gleich.

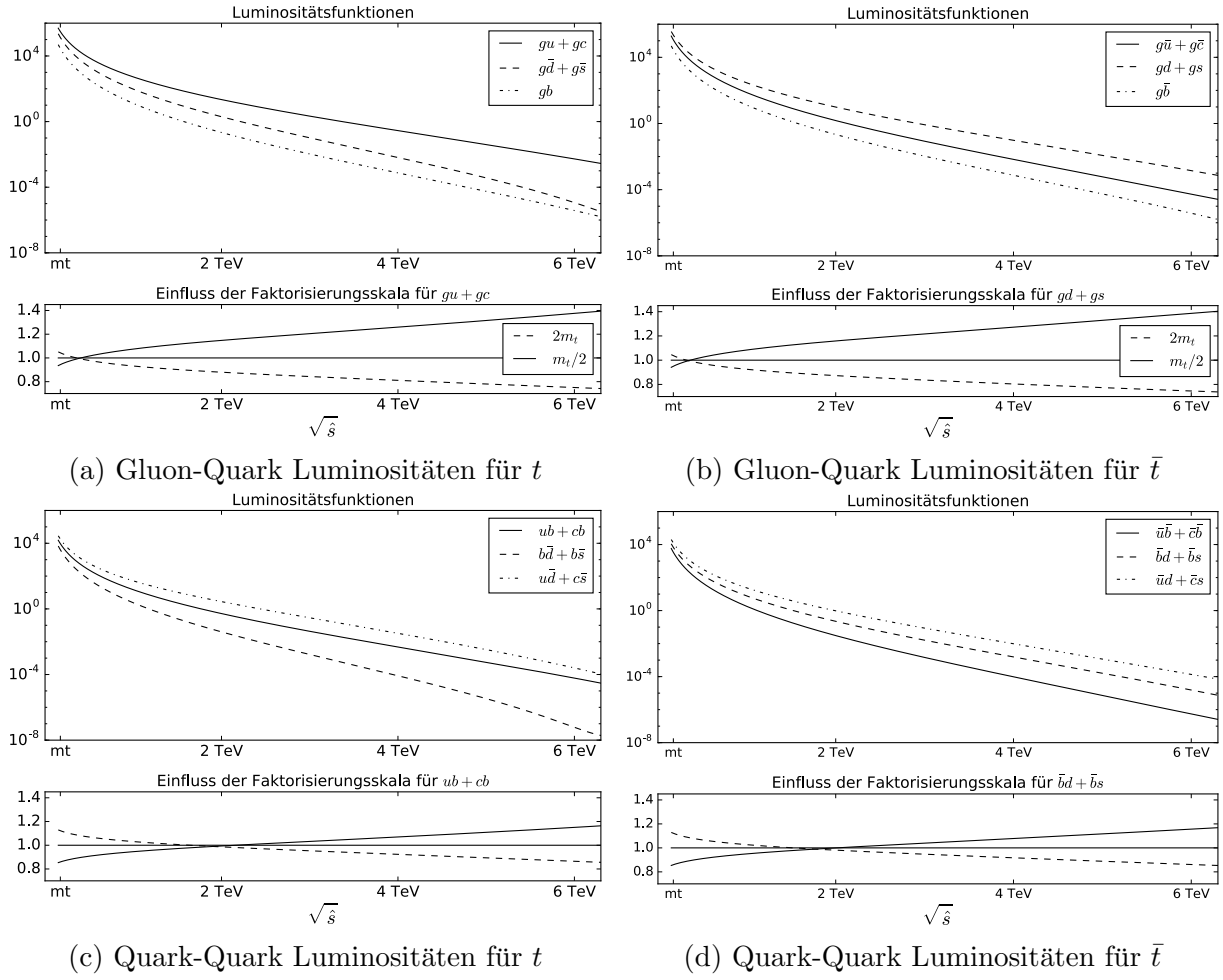


Abbildung 2.6: Luminositätsfunktionen für die Erzeugung einzelner Top-Quarks bzw. Top-Antiquarks bei $\mu_F = m_t = 173,21 \text{ GeV}$. Der Einfluss der Faktorisierungsskala wird durch $L(\mu_F = 2m_t)/L(\mu_F = m_t)$ und $L(\mu_F = m_t/2)/L(\mu_F = m_t)$ abgeschätzt.

$\sqrt{\hat{s}}$	F_{ub}	F_{gu}	F_{gb}	$F_{\bar{d}b}$	$F_{g\bar{d}}$	$F_{u\bar{d}}$
500 GeV	$2,33 \cdot 10^2$	$7,77 \cdot 10^3$	$3,65 \cdot 10^2$	$6,09 \cdot 10^2$	$2,19 \cdot 10^3$	$5,85 \cdot 10^2$
3 TeV	$4,31 \cdot 10^{-2}$	$2,15 \cdot 10^0$	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-1}$	$2,87 \cdot 10^{-1}$
$\sqrt{\hat{s}}$	$F_{\bar{u}\bar{b}}$	$F_{g\bar{u}}$	$F_{g\bar{b}}$	$F_{d\bar{b}}$	$F_{g\bar{d}}$	$F_{\bar{u}\bar{d}}$
500 GeV	$4,84 \cdot 10^1$	$1,76 \cdot 10^3$	$3,65 \cdot 10^2$	$1,41 \cdot 10^2$	$4,81 \cdot 10^3$	$3,33 \cdot 10^2$
3 TeV	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$8,48 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$1,61 \cdot 10^{-2}$	$8,38 \cdot 10^{-1}$	$8,64 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 2.6: Vergleich der Vorfaktoren aus Luminositätsfunktionen

2.5 Ergebnisse in führender Ordnung

In diesem Abschnitt wird zuerst das Verfahren für die numerische Integration über den Phasenraum und die Partonverteilungsfunktionen beschrieben. Im Anschluss werden inklusive Ergebnisse in führender Ordnung für die einzelnen Teilprozesse angegeben. Weiterhin wird untersucht, wie die verwendeten Schnitte auf die transversalen Impulse und die Pseudorapiditäten der Jets den Wirkungsquerschnitt beeinflussen. Zum Abschluss werden die Unsicherheiten der Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung diskutiert.

Numerische Integration

Die Integration über den partonischen Phasenraum und die Partonverteilungsfunktionen der einlaufenden Partonen erfolgt numerisch durch eine Monte-Carlo-Integration. In einer Dimension entspricht dies der Approximation

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) dx \approx S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{\rho(x_i)},$$

wobei die N Werte x_i auf der rechten Seite der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x)$ genügen. Für den Schätzwert S gilt bei großen N

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1} \left(-S^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)} \right]^2 \right),$$

die Unsicherheit des Schätzwertes S nimmt daher mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ab. Für die Monte-Carlo-Integration wird die Routine VEGAS [42][49] verwendet, welche die Varianz zusätzlich durch Importance Sampling und Stratified Sampling reduziert. In der ersten Iteration wird in VEGAS eine konsante Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x) = 1$ verwendet. In den weiteren Iterationen wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung angepasst, um die Unsicherheit σ zu verringern. Die Grundidee ist dabei, den Integrationsbereich aus Hyperkuben mit gleichem Beitrag zum Integral zusammenzusetzen. Nach mehreren Iterationen zur Anpassung der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit hinreichend großer Zahl N an Aufrufen können in n weiteren Iterationen Schätzwerte S_α und Unsicherheiten σ_α für $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ bestimmt werden. Das Integral kann nach n Iterationen durch das gewichtete Mittel

$$\bar{S} = \bar{\sigma}^2 \sum_{\alpha=1}^n \frac{S_\alpha}{\sigma_\alpha^2} \text{ mit } \frac{1}{\bar{\sigma}^2} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\sigma_\alpha^2}$$

abgeschätzt werden. Im Grenzfall gleicher Unsicherheiten folgt $\bar{\sigma} = \sigma/\sqrt{n}$. Bei stark voneinander abweichenden Unsicherheiten der Einzeliterationen liegt ein Hinweis auf eine zu geringe Anzahl an Aufrufen vor. Einzelne Klassen („Bins“) eines Histogramms in einer Observable O lassen sich durch

$$S_k = \sum_{u_k < O(x_i) < o_k} \frac{1}{N \rho(x_i)} f(x_i)$$

berechnen. Dabei sind u_k und o_k die Unter- und Obergrenze in der entsprechenden Observablen. Der Index k läuft über die einzelnen Klassen des Histogramms. Die Unsicherheiten können nach mehreren Iterationen durch das ungewichtete Mittel der Einzeliterationen abgeschätzt werden.

Prozess	σ_{LO}^t [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{t, y <2,5}$ [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}, y <2,5}$ [pb]
$ub \rightarrow tdg$	6,573(2)	1,2786(4)	3,022(1)	0,9623(1)
$u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g$	0,6974(1)	0,3982(1)	0,5628(1)	0,29934(2)
$\bar{d}b \rightarrow t\bar{u}g$	1,0340(3)	2,5753(8)	0,7049(2)	1,2368(2)
$gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}$	12,363(2)	2,3753(3)	4,6533(8)	1,5062(1)
$gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$	0,8358(2)	0,8360(1)	0,5936(1)	0,59353(5)
$g\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}$	2,5790(4)	6,337(1)	1,5621(2)	2,7370(2)
$PP \rightarrow t + 2 \text{ Jets}$	48,163(5)	27,600(3)	22,198(2)	14,6704(6)

Tabelle 2.7: Hadronische Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung

Numerische Ergebnisse für den hadronischen Wirkungsquerschnitt

In Tabelle 2.7 sind die hadronischen Wirkungsquerschnitte für die einzelnen Prozesse und für die Summe aller Prozesse angegeben. Die statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration werden in Klammern angegeben. In allen Fällen wird ein minimaler transversaler Impuls der Jets von $k_T^{\text{min}} = 25 \text{ GeV}$ gefordert. In der vierten und fünften Spalte wird zusätzlich $|\eta| < 2,5$ für die Pseudorapidität der Jets gefordert, in diesem Bereich des Phasenraums erlauben die inneren Detektoren von ATLAS und CMS eine Rekonstruktion von Ereignissen mit hoher Effizienz. Der größte Beitrag zum Wirkungsquerschnitt stammt wegen der Luminositätsfunktionen jeweils aus einem Prozess mit einem Gluon und einem Valenzquark im Anfangszustand. Durch den Schnitt mit η^{max} findet jedoch eine Verschiebung der relativen Anteile statt. Vor dem Schnitt mit η^{max} betragen die entsprechenden Anteile 51% (46%), der Wert für die Produktion von Top-Antiquarks wurde in Klammern angegeben. Nach dem Schnitt mit η^{max} betragen die relativen Anteile 38% (43%). Für Prozesse mit einem einlaufenden Valenzquark und einem einlaufenden Bottom-Quark führt der Schnitt mit η^{max} ebenfalls zu einer Verringerung auf weniger als die Hälfte des Ausgangswertes. Der Prozess mit $u\bar{d}$ im Anfangszustand erfährt die geringste Reduktion durch den Schnitt mit η^{max} . Ein weiterer Effekt des Schnittes mit η^{max} ist die Veränderung von $R_t = 2,17$ zu $R_t = 1,88$.

Einfluss der Phasenraumschnitte

Im Experiment sind Jets nur beobachtbar, wenn sie einen ausreichenden Abstand von der Strahlachse besitzen. Dies kann durch einen minimalen transversalen Impuls k_T^{min} erreicht werden, welcher von beiden Jets gefordert wird. Die Abhängigkeit von k_T^{min} wird in Abb. 2.7a für die Produktion von einzelnen Top-Quarks gezeigt ($R = 0,4$). Dafür wurde $k_T^{\text{min}} = 5 \text{ GeV}$ gesetzt und ein Histogramm des differentiellen Wirkungsquerschnitts für den transversalen Impuls des zweiten Jets erstellt. Da der erste Jet per Definition in jedem Ereignis einen größeren transversalen Impuls besitzt, lässt sich aus diesem Histogramm die Abhängigkeit von k_T^{min} ablesen (Tabelle 2.8). Wegen der logarithmischen Divergenz für $k_T^{\text{min}} \rightarrow 0$ gibt es eine starke Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von k_T^{min} . Es wird an dieser Stelle die Wahl $k_T^{\text{min}} = 25 \text{ GeV}$ getroffen, die im Experiment in vielen Analysen verwendet wird. Inklusive Wirkungsquerschnitte für größere Werte von k_T^{min} lassen sich aus dem Histogramm des transversalen Impulses des zweiten Jets ablesen.

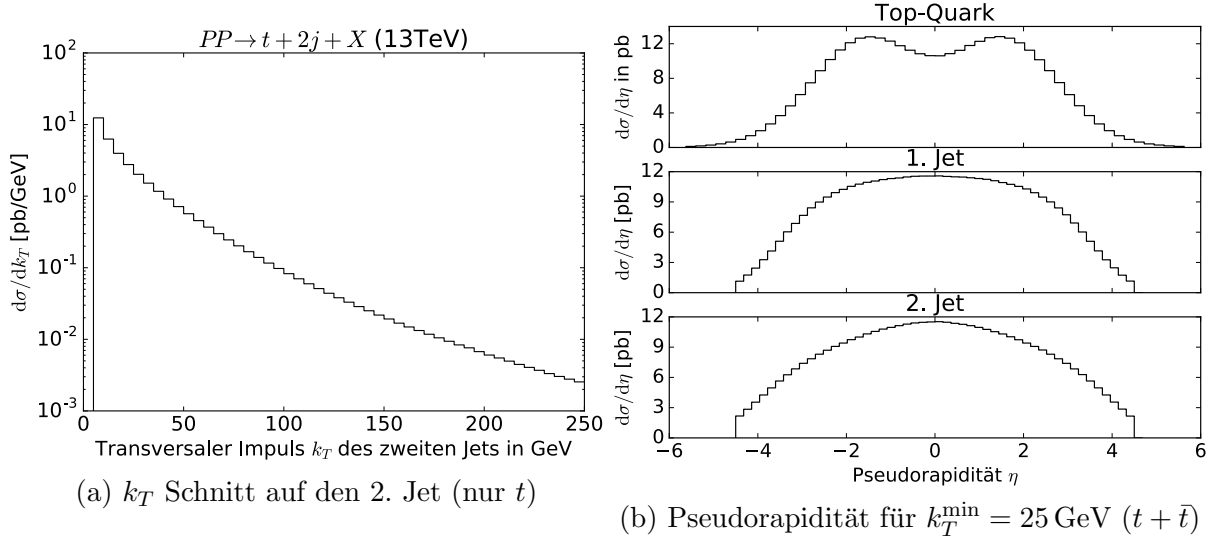


Abbildung 2.7: Histogramme ohne Schnitt auf die Pseudorapidity der Jets

k_T^{\min}	5 GeV	10 GeV	15 GeV	25 GeV	50 GeV	100 GeV
σ_{LO}^t [pb]	175,1	113,1	81,8	48,1	16,5	3,23
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	104,5	66,4	47,6	27,6	9,17	1,74

Tabelle 2.8: Einfluss von k_T^{\min} für die Jets auf den Wirkungsquerschnitt

In Abb. 2.7b werden die Pseudorapidityverteilungen der beiden Jets und des Top-Quarks für $k_T^{\min} = 25 \text{ GeV}$ für die Summe aus Top-Quark und Top-Antiquark Produktion gezeigt. Die Histogramme wurden dabei in den Grenzen $|\eta| < 6,25$ für das Top-Quark und $|\eta| < 4,5$ für die Jets aufgenommen. Da hohe Werte von $|\eta|$ kleinen Winkeln zur Strahlachse entsprechen, wird für einen realistischen Vergleich mit dem Experiment ebenfalls ein maximaler Betrag für die Pseudorapidity der Jets η^{\max} verwendet. Der Einfluss eines Phasenraumschnitts auf die Pseudorapidity ist subtil, da in einem Ereignis der erste, zweite oder beide Jets betroffen sein können. In Abb. 2.8 wird der Einfluss von η^{\max} getrennt für die Produktion von Top-Quarks und für die Produktion von Top-Antiquarks gezeigt. Ohne Schnitt auf die Pseudorapidity liegt das Maximum der Verteilung für beide Jets jeweils bei $\eta = 0$, während die Pseudorapidity des Top-Quarks an dieser Stelle jeweils ein lokales Minimum hat. Bei $\eta^{\max} = 2,5$ hingegen hat der zweite Jet jeweils ein breites Plateau im Intervall $-2 < \eta < 2$. Bei der Produktion von Top-Quarks hat der erste Jet mit $\eta^{\max} = 2,5$ ein lokales Minimum bei $\eta = 0$. Insgesamt sinkt der Wirkungsquerschnitt σ_{LO}^t durch den Schnitt auf die Pseudorapidity $\eta^{\max} = 2,5$ auf 46% des Wertes ohne Schnitt. Für $\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ führt der Schnitt zu einer Reduzierung auf 53% (Tabelle 2.9).

Histogramme der Einzelprozesse

In diesem Unterabschnitt werden Verteilungen in der Pseudorapidity für die einzelnen Prozesse der Produktion von Top-Quarks oder Top-Antiquarks diskutiert. Die Verteilung ohne Schnitt auf die Pseudorapidity ist jeweils mit eingezeichnet. In Abb. 2.9 werden die beiden Prozesse mit einem einlaufenden Valenzquark und einem einlaufenden Bottom-

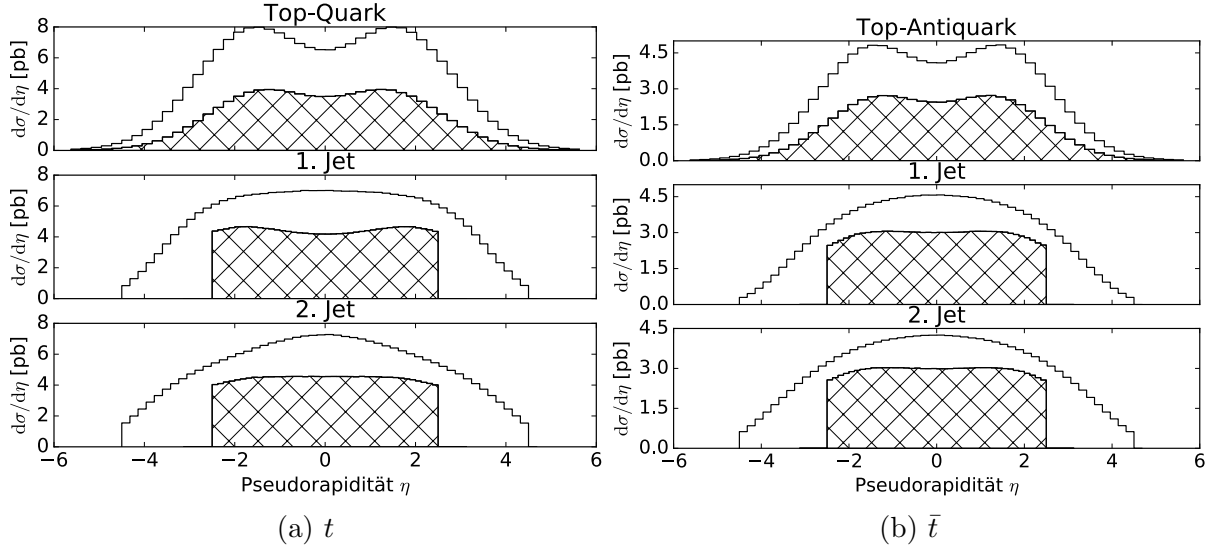


Abbildung 2.8: Verteilungen der Pseudorapidität ohne Schnitt und mit Schnitt $\eta^{\max} = 2,5$ auf die Pseudorapidität der Jets (kariertes Bereich mit η^{\max})

η^{\max}	∞	4,5	4	3,5	3	2,5
σ_{LO}^t [pb]	48,1	46,7	43,6	38,0	30,5	22,2
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	27,6	27,1	25,8	23,3	19,4	14,7

Tabelle 2.9: Einfluss von η^{\max} für die Jets auf den Wirkungsquerschnitt

Quark oder Bottom-Antiquark gezeigt, $ub \rightarrow tdg$ und $\bar{d}\bar{b} \rightarrow \bar{t}ug$. Die Verteilungen der Prozesse $bu \rightarrow tdg$ und $b\bar{d} \rightarrow \bar{t}ug$ folgen durch $\eta \leftrightarrow -\eta$. In vielen Ereignissen zeigen die longitudinalen Impulse aller auslaufenden Teilchen in die Richtung des einlaufenden Valenzquarks, dies entspricht einer positiven Pseudorapidität. Dieser Effekt ist für den Prozess $ub \rightarrow tdg$ stärker ausgeprägt, da das Proton zwei Up-Quarks als Valenzquarks besitzt, aber nur ein Down-Quark. Bei der Berücksichtigung von η^{\max} verändern sich die Rapiditätsverteilungen des Top-Quarks deutlich. Insbesondere wird die Anzahl an Ereignissen mit positiver Pseudorapidität des Top-Quarks reduziert. Der durchschnittliche Wert der Pseudorapidität sinkt in allen drei Fällen. In Abb. 2.10 werden die beiden Prozesse mit einem einlaufenden Valenzquark und einem einlaufenden Gluon gezeigt. Auffällig ist die Existenz von zwei lokalen Maxima bei den Verteilungen des 2. Jets. Durch Anwendung von η^{\max} wird der Wirkungsquerschnitt mehr als halbiert. Die resultierende Verteilung für den 1. Jet führt nach Addition des Prozesses mit umgedrehten Anfangszuständen zu einem lokalen Minimum bei $\eta = 0$. In Abb. 2.11 wird der letzte Fall mit Beteiligung von Valenzquarks gezeigt. Für den Prozess $u\bar{d} \rightarrow \bar{t}bg$ ist der geringe Effekt des Schnitts durch η^{\max} zu sehen. Durch die Unterschiede zwischen den Partonverteilungsfunktionen für Up-Quarks und Down-Quarks hat der ladungskonjugierte Prozess $\bar{u}d \rightarrow \bar{t}bg$ eine deutlich abweichende Verteilung in der Pseudorapidität. In den drei nicht gezeigten Fällen ist die Verringerung des Wirkungsquerschnitts durch η^{\max} geringer als in den ersten beiden Fällen. Weiterhin sind die Unterschiede zwischen der Produktion von Top-Quarks und der Produktion von Top-Antiquarks gering, da keine Valenzquarks beteiligt sind.

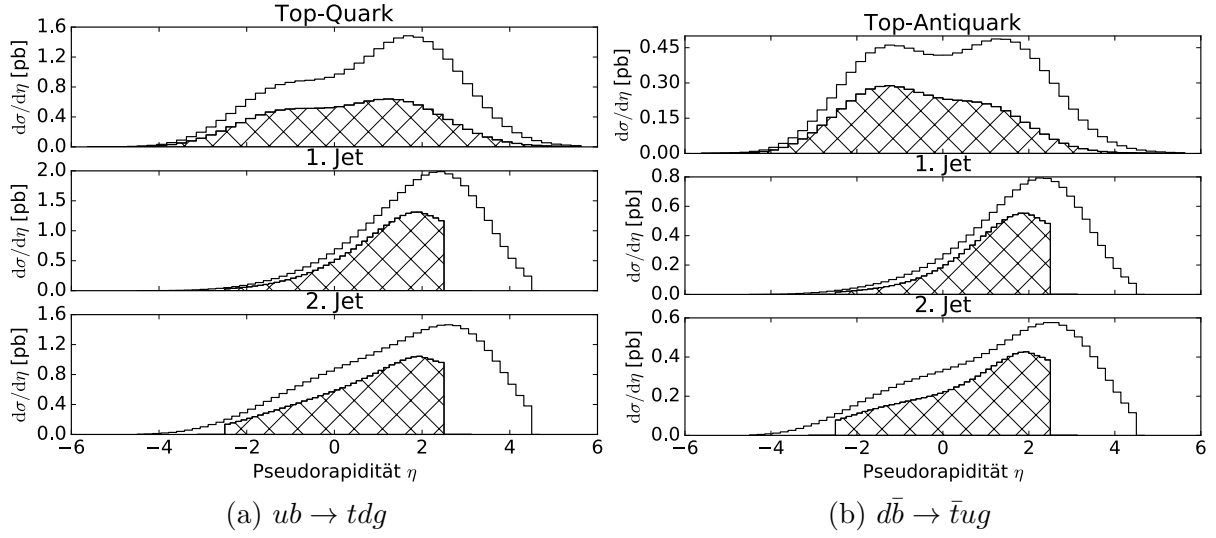


Abbildung 2.9: Valenzquark und Bottom-Quark im Anfangszustand

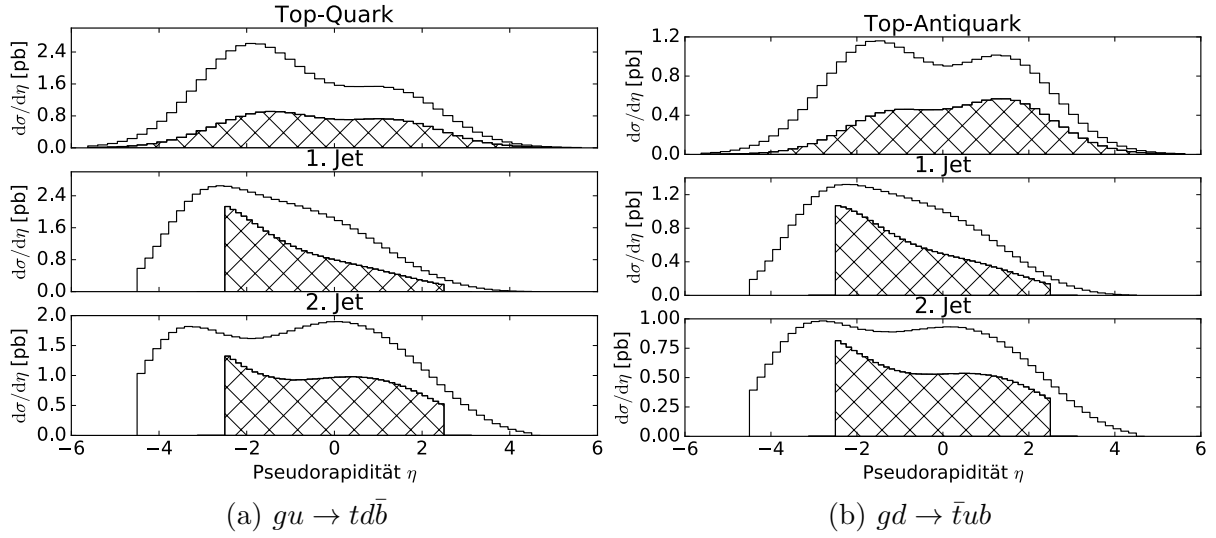


Abbildung 2.10: Valenzquark und Gluon im Anfangszustand

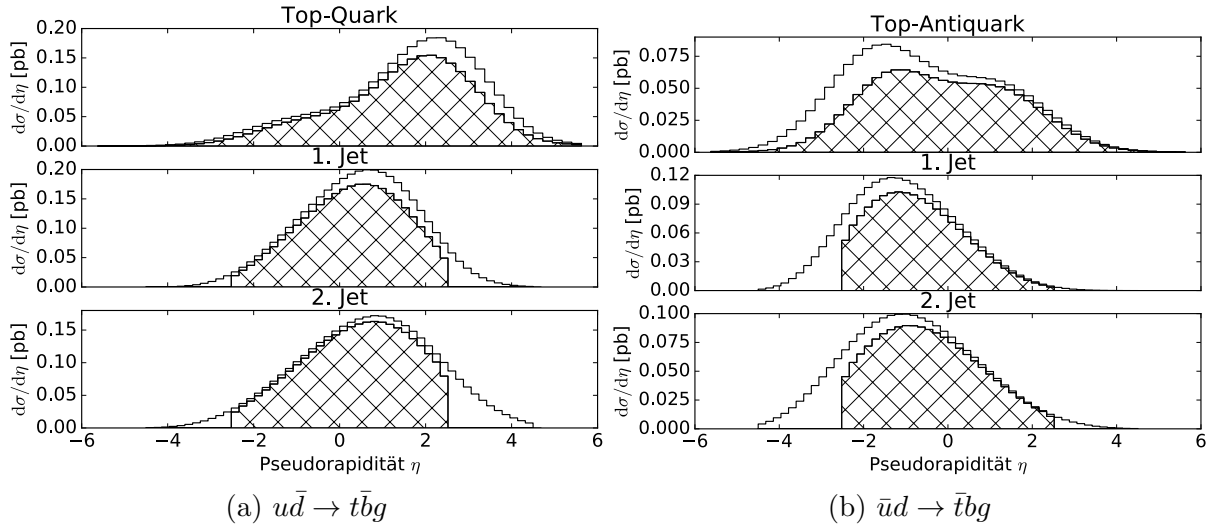


Abbildung 2.11: Valenzquark und Seequark im Anfangszustand

	σ_{ub} [pb]	σ_{gu} [pb]	σ_{gb} [pb]	$\sigma_{\bar{d}b}$ [pb]	$\sigma_{g\bar{d}}$ [pb]	$\sigma_{u\bar{d}}$ [pb]	σ [pb]
t	-0,0075	$-7,0 \cdot 10^{-6}$	-0,0023	-0,0020	0,00059	0,0058	-0,011
\bar{t}	-0,0022	$-3,0 \cdot 10^{-6}$	-0,0015	-0,0024	0,00072	0,0036	-0,0036

Tabelle 2.10: Abweichung $(\sigma_a - \sigma_{\text{exakt}})$ bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$

Unsicherheiten

In Tabelle 2.7 wurden hadronischd Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung zusammen mit ihren Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration angegeben. Neben diesen statistischen Unsicherheiten gibt es systematische Unsicherheiten aus erfolgten Näherungen und Unsicherheiten durch die verwendeten Parameter α_s , m_t , m_w und G_F . Die verwendeten Partonverteilungsfunktionen führen ebenfalls zu einer Unsicherheit. Weiterhin kann der Einfluss von Korrekturen in höherer Ordnungen der Störungstheorie durch Variation der Faktorisierungsskala und der Renormierungsskala abgeschätzt werden.

Unsicherheiten aus m_t , m_b , m_w und G_F

Für die Masse des Top-Quarks m_t , die Masse des W -Bosons m_w und die Fermi-Konstante G_F gilt [43]

$$\begin{aligned}
m_t &= (173,1 \pm 0,6) \text{ GeV}, \\
m_w &= (80,385 \pm 0,015) \text{ GeV} \text{ und} \\
G_F &= (1,1663787 \pm 0,0000006) \text{ GeV}^{-2}.
\end{aligned}$$

Die Unsicherheiten der Fermi-Kopplungskonstante und der Masse des W -Bosons sind jeweils kleiner als 0,1% und werden daher vernachlässigt. Die Unsicherheit aus m_t wird durch Berechnung mit der oberen und mit der unteren Grenze abgeschätzt. Für $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ ergeben sich die Werte $(\delta\sigma^t)_{m_t} = 0,13 \text{ pb}$ und $(\delta\sigma^{\bar{t}})_{m_t} = 0,09 \text{ pb}$, wobei jeweils der größte Abstand vom zentralen Wert $m_t = 173,21 \text{ GeV}$ verwendet wurde. Diese Unsicherheiten sind groß gegenüber den statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration.

Die Masse des Bottom-Quarks m_b wurde in der Rechnung vernachlässigt. Eine genaue Abschätzung der resultierenden Unsicherheit ist konzeptionell schwierig, da eine Berücksichtigung der Masse des Bottom-Quarks die Verwendung des 4-Flavour-Schemas für die Partonverteilungsfunktionen erfordert. Wegen $(m_t/m_b)^2 \approx 1700$ bei $m_b = 4,2 \text{ GeV}$ wird von einer relativen Unsicherheit im Subprozent-Bereich ausgegangen. Für die Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit einem Jet wurde in [50] die Masse des Bottom-Quarks durch Verwendung des 4-Flavour-Schemas berücksichtigt. Gegenüber der Rechnung im 5-Flavour-Schema wurde ein ca. 6% kleinerer Wert für den inklusiven Wirkungsquerschnitt gefunden. Bei Berücksichtigung der Unsicherheiten aus der Skalenvariation und den Partonverteilungsfunktionen sind die Wirkungsquerschnitte in beiden Schemen miteinander verträglich.

Näherung der Vorfaktoren

Durch die Näherung in den Vorfaktoren aus Gl. (2.9) wurde nicht σ_{exakt} , sondern ein approximierter Wirkungsquerschnitt σ_a berechnet. Die Differenz $(\sigma_a - \sigma_{\text{exakt}})$ kann direkt

durch eine Monte-Carlo-Integration bestimmt werden. Die numerischen Ergebnisse sind in Tabelle 2.10 angegeben. Bei der Produktion von Top-Quarks ist der exakte Wirkungsquerschnitt ca. 0,01 pb größer als der genäherte. Bei der Produktion von Top-Antiquarks ist dieser Wert mit ca. 0,004 pb noch kleiner. Beide Unsicherheiten sind gegenüber der Unsicherheit aus m_t vernachlässigbar. Diese Aussage gilt ebenfalls für die statistischen Unsicherheiten der hadronischen Wirkungsquerschnitte aus der Monte-Carlo-Integration.

Unsicherheiten aus α_s und aus den Partonverteilungsfunktion

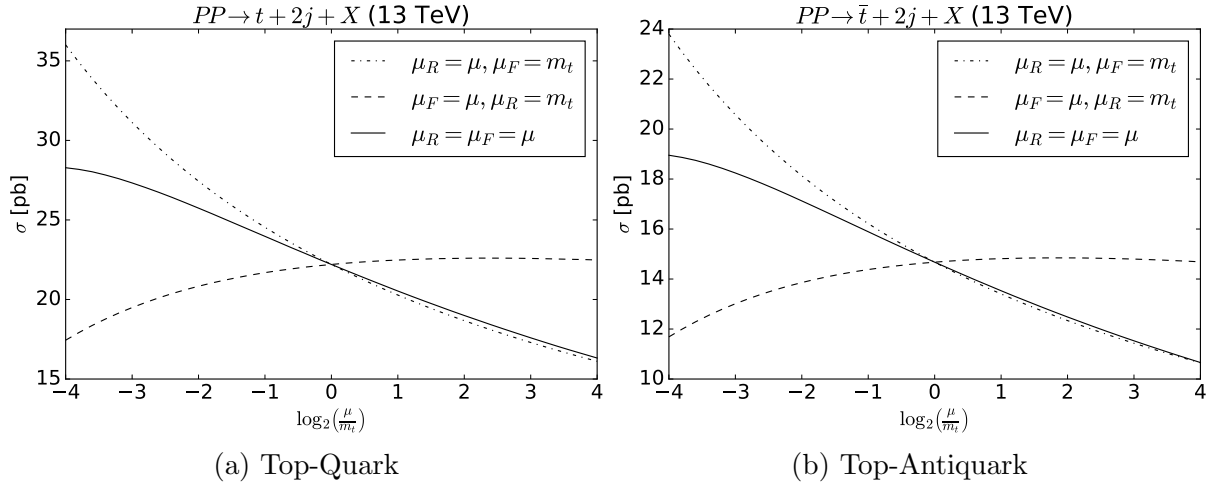
Die Partonverteilungsfunktionen wurden aus `PDF4LHC15_nlo_100_pdfas` eingebunden. Neben den Partonverteilungsfunktionen für den Zentralwert σ sind 102 weitere Sätze von Partonverteilungsfunktionen für die Abschätzung der Unsicherheiten enthalten, aus denen Wirkungsquerschnitte $\sigma^{(1)}$ bis $\sigma^{(102)}$ folgen. Für die Unsicherheiten gilt dann [44]

$$(\delta\sigma)_{\text{PDF}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{100} (\sigma^{(k)} - \sigma)^2} \text{ und } (\delta\sigma)_{\alpha_s} = \frac{\sigma^{(102)} - \sigma^{(101)}}{2}.$$

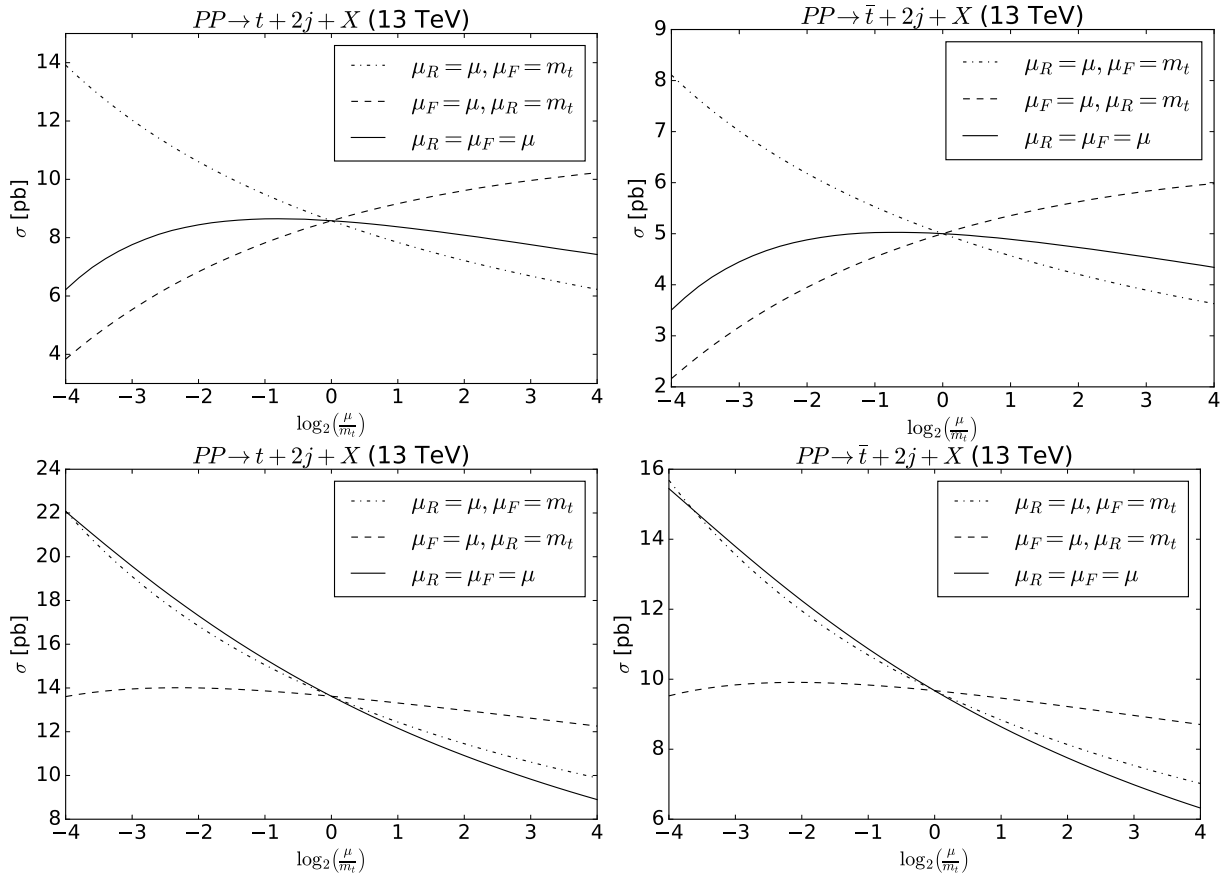
Die Ergebnisse sind in den Tabellen 2.12 und 2.13 angegeben. Die Unsicherheiten durch die Partonverteilungsfunktionen und aus α_s sind in allen Fällen größer als die Unsicherheit aus der Masse des Top-Quarks.

Skalenvariation

In Abb. 2.12 wird die Abhängigkeit der hadronischen Wirkungsquerschnitte σ^t und $\sigma^{\bar{t}}$ von der gemeinsamen Skala $\mu = \mu_R = \mu_F$ gezeigt. Es wird ebenfalls μ_F bei $\mu_R = m_t$ und μ_R bei $\mu_F = m_t$ variiert. Die Skalenabhängigkeiten von σ^t und $\sigma^{\bar{t}}$ haben bei Variation von μ_R bei fester Faktorisierungsskala $\mu_F = m_t$ einen konstanten Quotienten, da $\alpha_s(\mu_R)$ faktorisiert. Die Skalenabhängigkeit bei Variation von μ_F bei festem $\mu_R = m_t$ unterscheidet sich hingegen. Zwar gibt es in beiden Fällen ein lokales Maximum bei $\mu_F \approx 4m_t$, das Maximum ist bei $\sigma^{\bar{t}}$ jedoch ausgeprägter. In Abb. 2.13 wird die Skalenabhängigkeit getrennt für die Prozesse ohne Gluon im Anfangszustand und mit genau einem Gluon im Anfangszustand gezeigt. Im ersten Fall ist die reine μ_F Abhängigkeit monoton steigend. Bei gemeinsamer Variation gibt es ein lokales Maximum bei $\mu \approx m_t/2$. Bei genau einem Gluon im Anfangszustand ist die reine μ_F Abhängigkeit flach mit einem Maximum um $\mu_F \approx m_t/4$. Die gemeinsame Skalenabhängigkeit ähnelt daher der reinen μ_R Abhängigkeit. In Tabelle 2.11 sind Werte für die Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Wahlen von μ_R und μ_F angegeben. Es wurde auf 0,01 pb gerundet, was in allen Fällen unter der statistischen Unsicherheit liegt. Eine Methode zur Abschätzung der Unsicherheit aus der Skalenvariation ist die gemeinsame Variation beider Skalen in einem Intervall $[\frac{1}{2}\mu_0, 2\mu_0]$ um eine zentrale Skala μ_0 . Diese Methode wird im Folgenden Drei-Punkt-Methode genannt. Bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ findet eine Kürzung zwischen beiden Skalenabhängigkeiten statt. Bei der Sieben-Punkt-Methode werden die Skalen μ_R und μ_F unabhängig voneinander variiert, es wird jedoch zusätzlich $1/2 \leq \mu_R/\mu_F \leq 2$ gefordert. Die sieben resultierenden Möglichkeiten zur Wahl der Skalen sind in Tabelle 2.11 angegeben. Für $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ führen beide Methoden zum gleichen Ergebnis.



Abbildungung 2.12: Skalenabhängigkeit in führender Ordnung bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$



Abbildungung 2.13: Skalenabhängigkeit zerlegt nach Anfangszuständen für t (links) bzw. \bar{t} (rechts): keine Gluonen (oben) und ein Gluon (unten)

Gesamtergebnis mit Unsicherheiten

In den Tabellen 2.12 und 2.13 werden die berechneten hadronischen Wirkungsquerschnitte und ihre Unsicherheiten in einer Übersicht angegeben. Die dominante Unsicherheit des Wirkungsquerschnitts in führender Ordnung stammt aus der Skalenvariation. Es folgt die Unsicherheit aus den Partonverteilungsfunktionen, die in allen Fällen unterhalb von 3% liegt. Die Berechnung der Korrekturen in der QCD in nächstführender Ordnung der Störungstheorie ist somit der wichtigste Beitrag zur Verbesserung der Präzision der phänomenologischen Vorhersage.

In diesem Abschnitt wurde $(\delta\sigma)_\mu$ und $(\delta\sigma)_{\text{PDF}}$ nur für inklusive Wirkungsquerschnitte diskutiert, die Diskussion für differenzielle Wirkungsquerschnitte befindet sich im Abschnitt 4.2.

μ_R	μ_F	σ_{LO}^t [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	σ_{LO}^t [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]
m_t	m_t	22,20	14,67	9,56	5,41
$2m_t$	$2m_t$	20,53	13,53	8,60	4,84
$\frac{1}{2}m_t$	$\frac{1}{2}m_t$	23,96	15,89	10,65	6,07
$\frac{1}{2}m_t$	m_t	24,53	16,21	10,56	5,98
m_t	$\frac{1}{2}m_t$	21,68	14,37	9,64	5,49
m_t	$2m_t$	22,47	14,81	9,41	5,30
$2m_t$	m_t	20,27	13,40	8,73	4,94

Tabelle 2.11: Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Skalen für $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ (Mitte) und $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ (rechts)

σ_{LO}	[pb]	$(\delta\sigma)_{\mu 7}$	[pb]	$(\delta\sigma)_{\mu 3}$	[pb]	$(\delta\sigma)_{\text{PDF}}$	[pb]	$(\delta\sigma)_{\alpha_s}$ [pb]	$(\delta\sigma)_{m_t}$	[pb]
σ_{LO}^t	9,6	+11,4%	+1,1	+11,4%	+1,1	+2,0%	+0,19	+0,14	+0,6%	+0,061
		-10,0%	-1,0	-10,0%	-1,0	-2,0%	-0,19	-0,14	-0,6%	-0,058
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$	5,4	+12,1%	+0,7	+12,1%	+0,7	+2,7%	+0,14	+0,09	+0,7%	+0,034
		-10,5%	-0,6	-10,5%	-0,6	-2,7%	-0,14	-0,09	-0,6%	-0,038
$\sigma_{\text{LO}}^{t+\bar{t}}$	15,0	+11,7%	+1,8	+11,7%	+1,8	+2,2%	+0,34	+0,23	+0,6%	+0,095
		-10,2%	-1,5	-10,2%	-1,5	-2,2%	-0,34	-0,23	-0,6%	-0,096

Tabelle 2.12: Inklusiver Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ mit Unsicherheiten

σ_{LO}	[pb]	$(\delta\sigma)_{\mu 7}$	[pb]	$(\delta\sigma)_{\mu 3}$	[pb]	$(\delta\sigma)_{\text{PDF}}$	[pb]	$(\delta\sigma)_{\alpha_s}$ [pb]	$(\delta\sigma)_{m_t}$	[pb]
σ_{LO}^t	22,2	+10,5%	+2,3	+8,0%	+1,8	+1,7%	+0,37	+0,35	+0,5%	+0,13
		-8,7%	-1,9	-7,5%	-1,7	-1,7%	-0,37	-0,35	-0,5%	-0,12
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$	14,7	+10,5%	+1,5	+8,3%	+1,2	+2,1%	+0,31	+0,24	+0,6%	+0,084
		-8,7%	-1,3	-7,8%	-1,1	-2,1%	-0,31	-0,24	-0,6%	-0,086
$\sigma_{\text{LO}}^{t+\bar{t}}$	36,9	+10,5%	+3,9	+8,1%	+3,0	+1,9%	+0,69	+0,59	+0,6%	+0,21
		-8,7%	-3,2	-7,6%	-2,8	-1,9%	-0,69	-0,59	-0,5%	-0,20

Tabelle 2.13: Inklusiver Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ mit Unsicherheiten

3 Wirkungsquerschnitte in nächstführender Ordnung der QCD

Die theoretische Unsicherheit des Wirkungsquerschnitts der Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets in führender Ordnung wird durch die Unsicherheit aus der Variation der Faktorisierungsskala und der Renormierungsskala dominiert. Die Verringerung der theoretischen Unsicherheit erfordert daher die Berechnung der Korrekturen in nächstführender Ordnung der QCD. Zwei neue Eigenschaften im Vergleich zur führenden Ordnung sind dabei Schleifenintegrale über einen internen Impuls sowie UV- und IR-Divergenzen in Teilausdrücken, die sich im Gesamtergebnis kürzen müssen.

Der erste Abschnitt führt die grundlegende Unterscheidung zwischen reellen und virtuellen Korrekturen ein, die zusammen die Korrekturen in nächstführender Ordnung der QCD bilden. Im Anschluss werden Feynman-Diagramme für die in den virtuellen Korrekturen auftretenden Einschleifen-Amplituden gezeigt. Weiterhin werden die in den reellen Korrekturen auftretenden Prozesse mit neuen Anfangs- oder Endzuständen angegeben.

Im zweiten Abschnitt wird auf die Berechnung der virtuellen Korrekturen eingegangen. Wesentlich dabei ist die Rückführung der auftretenden Einschleifen-Integrale mit Abhängigkeit von Lorentz-Indices auf bekannte skalare Integrale. Der Counterterm zur Kürzung der UV-Divergenzen der Einschleifen-Amplituden wird ebenfalls angegeben.

Im dritten Abschnitt wird ein aus der Literatur bekanntes Verfahren zur numerischen Berechnung der reellen Korrekturen angewandt. In diesem Verfahren muss ein Subtraktionsterm, ein integrierter Subtraktionsterm und ein weiterer Beitrag mit der Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala berechnet werden. Auf diese Beiträge wird in Unterabschnitten eingegangen. In dem verwendeten Subtraktionsverfahren kann die Kürzung der IR-Divergenzen zwischen den reellen und den virtuellen Korrekturen für einzelne Phasenraumpunkte überprüft werden.

Im letzten Abschnitt werden interne und externe Tests zur Validierung der Rechnung präsentiert. Als wichtiger Test der Selbstkonsistenz wird die Kürzung der UV- und IR-Divergenzen überprüft. Als externer Test erfolgt unter anderem ein Vergleich mit einer unabhängigen Implementierung von Duc Ninh Le [12].

3.1 Überblick über reelle und virtuelle Korrekturen

Der partonische Wirkungsquerschnitt eines $2 \rightarrow n$ Prozesses in führender Ordnung

$$\hat{\sigma}_{\text{LO}} = \alpha_s^k \hat{\sigma}_0 = \frac{1}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n)} |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2(p_1, p_2, q_1, \dots, q_n) F_J^{(n)}(q_1, \dots, q_n)$$

folgt nach Integration von $|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2$ über den Phasenraum. Ist $\mathcal{A}_{\text{Born}}$ von der Ordnung $O(g_s^k)$, so ist $\hat{\sigma}_{\text{LO}}$ wegen $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ von der Ordnung $O(\alpha_s^k)$. Es wird nun die störungstheo-

retische Entwicklung des partonischen Wirkungsquerschnitts

$$\hat{\sigma} = \alpha_s^k \hat{\sigma}_0 + \alpha_s^{k+1} \hat{\sigma}_1 + \alpha_s^{k+2} \hat{\sigma}_2 + O(\alpha_s^{k+3})$$

in der starken Kopplungskonstante betrachtet. Störungstheoretisch erhält der Wirkungsquerschnitt durch virtuelle und durch reelle Korrekturen Beiträge jenseits der führenden Ordnung von α_s . Zum einen tragen zur Amplitude \mathcal{A} des $2 \rightarrow n$ Prozesses auch Diagramme mit einer oder mit mehreren Schleifen bei,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{Born}} + \alpha_s \mathcal{A}_{1\text{Loop}} + \alpha_s^2 \mathcal{A}_{2\text{Loop}} + O(g_s^{k+6}),$$

wobei die Amplituden $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}$ und $\mathcal{A}_{2\text{Loop}}$ auf der rechten Seite auf die Ordnung $O(g_s^k)$ von $\mathcal{A}_{\text{Born}}$ normiert sind. Im Betragsquadrat

$$|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 + \alpha_s (2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}]) + \alpha_s^2 (|\mathcal{A}_{1\text{Loop}}|^2 + 2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{2\text{Loop}}]) + O(\alpha_s^{k+3})$$

zeigen sich nun Terme, die zu $\hat{\sigma}_1$ und $\hat{\sigma}_2$ beitragen. Die entsprechenden Terme bilden die virtuellen Korrekturen.

Zum anderen erhöht sich die Ordnung in α_s durch Abstrahlung von zusätzlichen Gluonen oder Quark-Antiquark Paaren. Für die Amplituden \mathcal{A}^{R} von $2 \rightarrow (n+1)$ Prozessen und \mathcal{A}^{RR} von $2 \rightarrow (n+2)$ Prozessen gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\text{R}} &= \sqrt{\alpha_s} (\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}} + \alpha_s \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{\text{R}}) + O(g_s^{k+5}) \text{ und} \\ \mathcal{A}^{\text{RR}} &= \alpha_s \mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{RR}} + O(g_s^{k+4}), \end{aligned}$$

wobei die Amplituden $\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}}$, $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{\text{R}}$ und $\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{RR}}$ wieder auf die Ordnung $O(g_s^k)$ normiert sind. Die Betragsquadrate

$$|\mathcal{A}^{\text{R}}|^2 = \alpha_s |\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}}|^2 + \alpha_s^2 (2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}*} \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{\text{R}}]) + O(\alpha_s^{k+3})$$

und

$$|\mathcal{A}^{\text{RR}}|^2 = \alpha_s^2 |\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{RR}}|^2 + O(\alpha_s^{k+3})$$

tragen wieder zu $\hat{\sigma}_1$ und $\hat{\sigma}_2$ bei. Die entsprechenden Terme bilden die reellen Korrekturen. Das Zusammenfassen von Beiträgen gleicher Ordnung in der Kopplungskonstante führt nun zu

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\text{NLO}} &= \hat{\sigma}_{\text{LO}} + \alpha_s^{k+1} \hat{\sigma}_1 = \frac{\alpha_s}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n)} 2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}] F_{\text{J}}^{(n)}(q_1, \dots, q_n) \\ &+ \frac{\alpha_s}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n+1)} |\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}}|^2 F_{\text{J}}^{(n)}(q_1, \dots, q_{n+1}) + \hat{\sigma}_{\text{LO}} \\ &= \hat{\sigma}_{\text{LO}} + \hat{\sigma}^{\text{V}} + \hat{\sigma}^{\text{R}}, \end{aligned}$$

für den Wirkungsquerschnitt in nächstführender Ordnung in der QCD müssen daher die virtuellen Korrekturen $\hat{\sigma}^{\text{V}}$ und die reellen Korrekturen $\hat{\sigma}^{\text{R}}$ berechnet werden. Auf den Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{\text{NNLO}}$ wird am Ende dieses Abschnitts eingegangen.

Beispiel: $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

Zur Veranschaulichung wird die Produktion von Hadronen bei Elektron Positron Kollisionen mit einer Schwerpunktsenergie unterhalb der Z-Masse betrachtet (siehe Kap. 17.2 [51]). In führender Ordnung muss dafür die Born-Amplitude des partonischen Prozesses $e^+e^- \rightarrow u\bar{u}$ berechnet werden. Der entsprechende Wirkungsquerschnitt σ_{LO} ist von der Ordnung $O(\alpha^2)$. Die beiden Teilchen mit Farbladung im Endzustand erlauben die Abstrahlung oder den Austausch von Gluonen. Der Austausch eines virtuellen Gluons zwischen dem auslaufenden Paar aus Quark und Antiquark führt zum Einschleifen-Diagramm in Abb. 3.1a. Die zugehörige Einschleifen-Amplitude ist von der Ordnung $O(\alpha\alpha_s)$. Aus der Interferenz mit der Born-Amplitude folgen die virtuellen Korrekturen von der Ordnung $O(\alpha^2\alpha_s)$. Aus den beiden Diagrammen mit einem abgestrahlten reellen Gluon folgen die reellen Korrekturen (Abb. 3.1b und 3.1c). Bei der Messung des Wirkungsquerschnitts

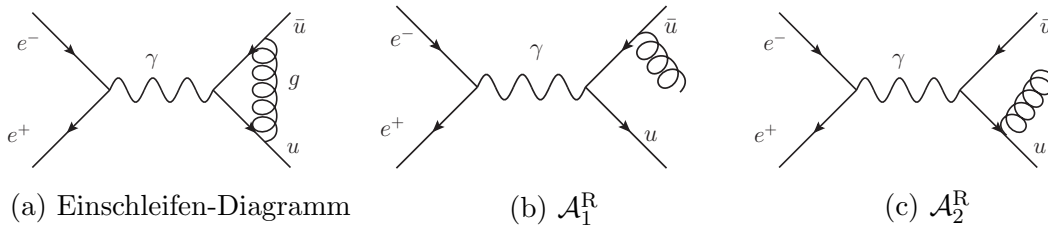


Abbildung 3.1: Diagramme für $e^+e^- \rightarrow 2 \text{ Jets}$ in NLO QCD

$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ im Experiment kann im Allgemeinen nicht zwischen virtuellen und reellen Korrekturen unterschieden werden. Die drei Teilchen im Endzustand der reellen Korrekturen können nur für hinreichend große Energien des Gluons und für hinreichend große Winkel zwischen dem Gluon und den beiden Quarks getrennt aufgelöst werden, wobei der Wirkungsquerschnitt von der Auflösung des Detektors abhängen würde. Dies wird durch die allgemeine Messung von $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ vermieden.

Bei der Berechnung von σ^R ist eine Integration über den gesamten Phasenraum wegen IR-Divergenzen nicht möglich (Abschnitt 2.4). Aus der Energie-Zeit-Unschärferelation folgt jedoch, dass weiche oder kollineare Gluonen die Produktion eines Quark-Antiquark Paares nicht wesentlich beeinflussen sollten, da die virtuellen Quarks in diesem Fall nahe ihrer Massenschale liegen müssen. Tatsächlich sind die virtuellen Korrekturen σ^V einzeln betrachtet ebenfalls IR-divergent. In der Summe ($\sigma^R + \sigma^V$) kürzen sich die IR-Divergenzen jedoch für IR-sichere Observablen. Die numerischen Kürzungen der IR-Divergenzen für dieses Beispiel wird im Unterabschnitt 3.3.4 explizit gezeigt.

Durch Kinoshita [52] sowie durch Lee und Nauenberg [53] wurde für Quantenfeldtheorien allgemein gezeigt, dass sich weiche und kollineare Divergenzen aus Endzustandssingularitäten für hinreichend inklusive Observablen kürzen. Dies gilt im Speziellen auch für die QCD.

Einschleifen-Amplituden bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks

In den virtuellen Korrekturen für die Erzeugung einzelner Top-Quarks treten Einschleifen-Amplituden von der Ordnung $O(G_F g_s^3)$ auf. Analog zur führenden Ordnung existieren für die Produktion von Top-Quarks bzw. von Top-Antiquarks je 12 Prozesse, die durch Kreuzen auseinander folgen. Es genügt daher, zunächst den Basisprozess $ub \rightarrow t d g$ zu

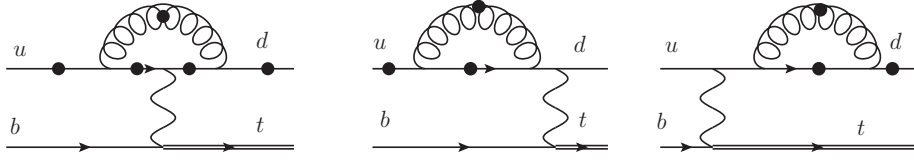


Abbildung 3.2: Diagramme für $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^B$, jeder Punkt steht für eines von 11 Diagrammen mit einem abgestrahlten auslaufenden Gluon

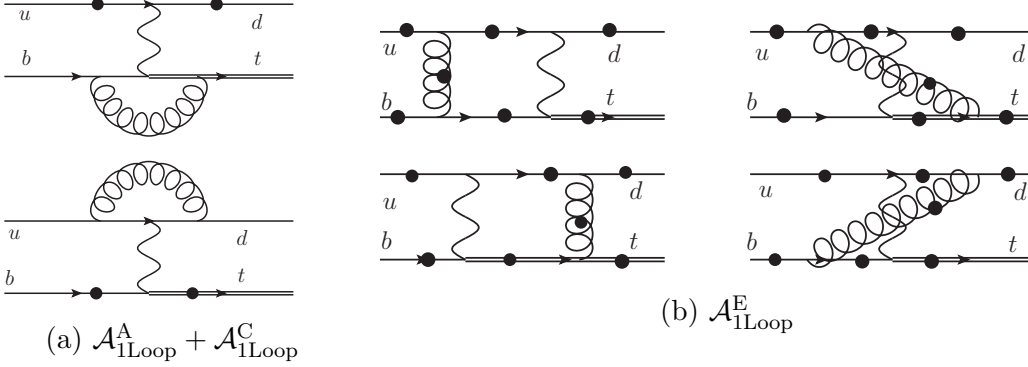


Abbildung 3.3: Diagramme für $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^A$ (links oben), $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^C$ und $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^E$

betrachten. Für die Einschleifen-Amplitude ist eine Zerlegung

$$\mathcal{A}_{1\text{Loop}} = \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^A + \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^B + \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^C + \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^D + \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^E$$

in eichinvariante Teilamplituden möglich (Abb. 3.2 und Abb. 3.3). Aus $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ folgt $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^A$ durch eine Vertexkorrektur an der schweren Quark-Linie (Abb. 3.3a oben). In den Diagrammen aus $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^B$ befindet sich eine Vertex- oder Selbstenergiekorrektur an der leichten Quark-Linie, zusätzlich wird ein auslaufendes Gluon von der leichten Quark-Linie abgestrahlt (Abb. 3.2). Analog folgen aus $\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$ die eichinvarianten Teilamplituden $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^C$ (Abb. 3.3a unten) und $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^D$. Wegen der Eichinvarianz der gesamten Amplitude $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}$ muss auch für die Teilamplitude $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^E$ Eichinvarianz gelten. Diese Teilamplitude enthält alle Diagramme mit einem Austausch eines virtuellen Gluons zwischen den Quark-Linien.

Die Anzahl an Diagrammen und die Komplexität der auftretenden Schleifenintegrale sind in Tabelle 3.1 angegeben. Die Schleifenintegrale I_N können durch die Zahl der enthaltenen Propagatoren N unterschieden werden. Im Folgenden werden die Integrale je nach Anzahl an Propagatoren nach $A := I_1, B := I_2, C := I_3, D := I_4$ und $E := I_5$ benannt. $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^E$ unterscheidet sich von allen anderen Teilamplituden durch das Auftreten von E-Integralen. Weiterhin kann die Komplexität der Integrale durch die Anzahl an Lorentz-Indices beschrieben werden. Diese Indices stammen von Propagatoren für Quarks oder von Dreiervertices aus Gluonen. Bei den gezeigten Feynman-Diagrammen genügt es, die Anzahl an Quarks in der Schleife zu betrachten.

Teilamplitude	Diagramme	Integrale $I_N(R)$
$\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^A$	2	$I_3(2)$
$\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^B$	11	$I_2(1), I_3(2), I_4(3)$
$\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^C$	2	$I_3(2)$
$\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^D$	11	$I_2(1), I_3(2), I_4(3)$
$\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^E$	28	$I_4(2), I_5(3)$

Tabelle 3.1: Eichinvariante Teilamplituden der Einschleifen-Amplitude und die enthaltenen Tensorintegrale mit N Propagatoren und höchstem Rang R (entspricht jeweils der maximalen Anzahl von Quarks in der Schleife)

Prozess	n_v	n_m	A
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}d$	3	0	6
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}dg$	4	0	12
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}dgg$	4	1	13
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}du\bar{u}$	4	1	13
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}dd\bar{d}$	4	1	13
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}dc\bar{c}$	5	0	20
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}ds\bar{s}$	5	0	20
$0 \rightarrow t\bar{b}\bar{u}db\bar{b}$	4	1	13

Tabelle 3.2: Anzahl A an Prozessen

Reelle Korrekturen bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks

Die reellen Korrekturen müssen von der Ordnung $O(G_F^2 \alpha_s^2)$ sein. Für die Born-Amplituden der reellen Prozesse gibt es damit zwei prinzipielle Möglichkeiten,

$$\begin{aligned}
u + b &\rightarrow t + d + g + g \text{ und} \\
u + b &\rightarrow t + d + q + \bar{q} \text{ mit } q \in \{u, d, c, s, b\}.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen sind nach dem Kreuzen aller Teilchen in den Endzustand, z. B. $0 \rightarrow tdu\bar{u}\bar{b}$, identische Partonen am Prozess beteiligt. Dies hat Einfluss auf die Anzahl möglicher Anfangszustände, wie folgende Überlegung zeigt.

Es wird allgemein der Prozess

$$0 \rightarrow t + P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

betrachtet, bei dem alle Teilchen P_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ in den Endzustand gekreuzt wurden. Es soll nun die Anzahl an geordneten Paaren von möglichen Anfangszuständen herausgefunden werden. Sind alle Teilchen verschieden, so gibt es $n(n-1)$ geordnete Paare von Anfangszuständen. Nun seien von allen n Teilchen nur n_v verschieden. Von den mehrfach vorkommenden Teilchen gebe es n_m . Dann gibt es

$$A = n_v(n_v - 1) + n_m$$

geordnete Paare an Anfangszuständen.

Im Beispiel $0 \rightarrow tdu\bar{u}\bar{b}$ kommen $n_v = 4$ verschiedene Teilchen vor: $\{d, u, \bar{u}, \bar{b}\}$. Allein \bar{u} kommt mehrfach vor, daher $n_m = 1$. Dies ergibt $A = 13$ verschiedene Anfangszustände. In Tabelle 3.2 sind alle weiteren Fälle aufgelistet, in der Summe gibt es 92 Prozesse für die zu berechnenden reellen Korrekturen. Durch Vertauschen der ersten und der zweiten Generation von Quarks ergeben sich weitere 92 Prozesse,

$$\begin{aligned}
c + b &\rightarrow t + s + g + g \text{ und} \\
c + b &\rightarrow t + s + q + \bar{q} \text{ mit } q \in \{u, d, c, s, b\},
\end{aligned}$$

die reellen Korrekturen werden daher durch 184 Prozesse gebildet, die sich in den beteiligten Teilchen unterscheiden. Das Vertauschen der Quark Generationen führt jedoch nur zu einem vom Phasenraum unabhängigen Vorfaktor. Dies gilt ebenfalls für die je 20 aus $0 \rightarrow t\bar{u}bdc\bar{c}$ und $0 \rightarrow t\bar{u}bds\bar{s}$ folgenden Prozesse. Es müssen daher für jeden Phasenraum-punkt statt 184 nur 72 reelle Prozesse mit verschiedenen Betragsquadraten der Amplitude berechnet werden. Durch Berücksichtigung von Vorfaktoren lässt sich dann die Summe aller Prozesse berechnen.

Anzahl an Diagrammen

Die Born-Amplitude des Prozess $ub \rightarrow tdg(q_3)g(q_4)$ besteht aus 24 Diagrammen. Es gibt $12 = 4 \times 3$ Möglichkeiten zwei Gluonen von verschiedenen Quarks abzustrahlen. Zwischen dem Gluon mit Impuls q_3 und dem Gluon mit Impuls q_4 muss dabei unterschieden werden. Bei Abstrahlung beider Gluonen von einem Quark gibt es jeweils drei Möglichkeiten, die in Abb. 3.4 gezeigt werden. Die Amplituden der Prozesse $ub \rightarrow tdc\bar{c}$ und $ub \rightarrow tds\bar{s}$

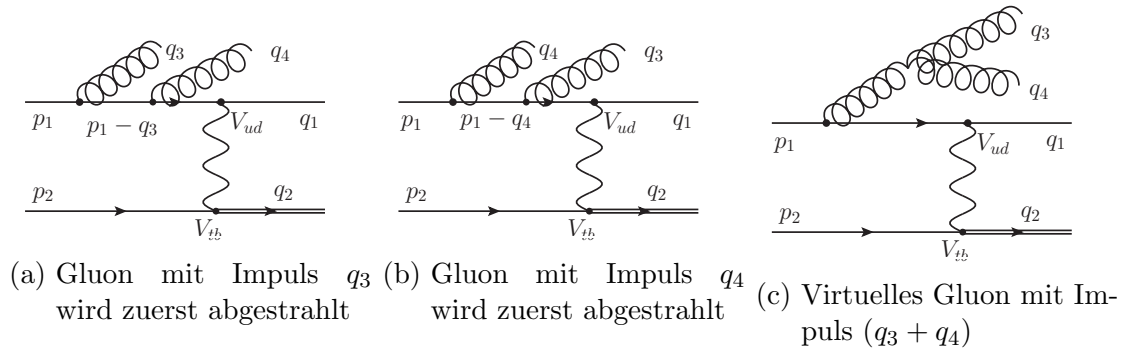


Abbildung 3.4: Beispieldiagramme des Prozesses $ub \rightarrow dtgg$

bestehen aus vier Diagrammen, bei denen sich ein abgestrahltes Gluon in ein Paar aus Quark und Antiquark aufspaltet (Abb. 3.5a). Bei den Amplituden der Prozesse $ub \rightarrow tdu\bar{u}$ und $ub \rightarrow tdb\bar{b}$ gibt es jeweils vier weitere Diagramme (Abb. 3.5b). Für den Prozess $ub \rightarrow tddd$ gibt es ebenfalls acht Diagramme, da zwischen auslaufenden Down-Quarks mit verschiedenen Impulsen unterschieden werden muss (Abb. 3.5c).

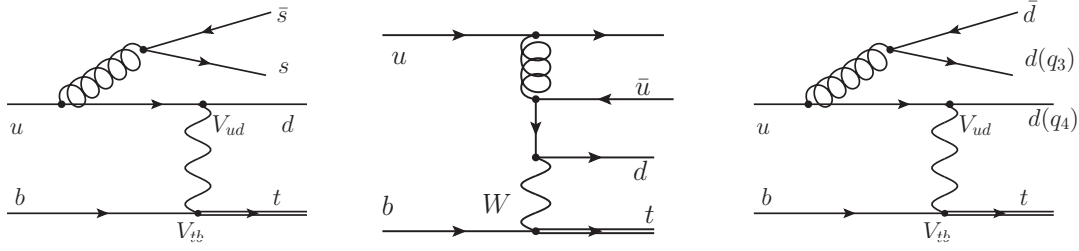
Analog zur führenden Ordnung enthalten bei der Produktion einzelner Top-Quarks Prozesse mit einem Down-Quark und einem Up-Antiquark im Endzustand resonante Diagramme. Auf diese Diagramme wird im Unterabschnitt 3.3.3 eingegangen.

Unterscheidung zwischen s - und t -Kanal

In der führenden Ordnung ist eine Aufteilung des Wirkungsquerschnitts in einen t -Kanal Anteil und eine s -Kanal Anteil möglich. Wesentlich dafür ist das Verschwinden von Beiträgen mit dem Interferenzterm

$$2\text{Re} [(\mathcal{A}_{\text{Born}}^t)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s]$$

wegen der Farbalgebra der QCD. In den reellen Korrekturen der nächstführenden Ordnung ist diese Aufteilung wegen des Auftretens eines Interferenzterms nicht mehr ohne Weiteres möglich. Für den Prozess $ub \rightarrow tdgg$ gibt es s -Kanal artige Diagramme mit dem Farbanteil



(a) Abstrahlung eines Paares aus Quark und Anti-quark (b) Weiteres Diagramm für $ub \rightarrow tdu\bar{u}$ (c) Die Vertauschung $q_3 \leftrightarrow q_4$ führt zu einem weiteren Diagramm

Abbildung 3.5: Beispieldiagramme für Prozesse $ub \rightarrow dtq\bar{q}$ mit $q \in \{u, d, c, s, b\}$

$(T^{g_2}T^{g_1})_{du}\delta_{tb}$. In t -Kanal artigen Diagrammen kommt der Farbfaktor $\delta_{ud}(T^{g_1}T^{g_2})_{tb}$ vor. Aus der Farbalgebra folgt

$$(T^{g_2}T^{g_1})_{du}\delta_{tb}[\delta_{ud}(T^{g_1}T^{g_2})_{tb}]^* = \text{Sp}(T^{g_2}T^{g_1})\text{Sp}(T^{g_2}T^{g_1}) = T_f N_C C_F,$$

der Interferenzterm verschwindet daher nicht.

Berechnung der Produktion von Top-Antiquarks

Analog zu Gl. (2.3) gilt wegen CP-Invarianz

$$2\text{Re}[\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}}]_{ub \rightarrow tdg}(p_u^P, p_b^P, p_t^P, p_d^P, p_g^P) = 2\text{Re}[\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}}]_{\bar{u}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{g}}(p_u, p_b, p_t, p_d, p_g).$$

Im Gegensatz zu Gl. (2.4) für $|\mathcal{A}|^2$ gilt im Allgemeinen

$$2\text{Re}[\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}}]_{ub \rightarrow tdg}(p_u^P, p_b^P, p_t^P, p_d^P, p_g^P) \neq 2\text{Re}[\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}}]_{ub \rightarrow tdg}(p_u, p_b, p_t, p_d, p_g),$$

dies ist durch Viererprodukte des internen Schleifenimpulses mit externen Impulsen erklärbar. Die notwendige Paritätstransformation bei der Anwendung von Gl. (2.3) kann numerisch durchgeführt werden, weswegen die Implementierung der Einschleifen-Amplitude für den Prozess $ub \rightarrow tdg$ ebenfalls in nächstführender Ordnung genügt.

Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt für die Produktion einzelner Top-Quarks in NNLO QCD

Der Wirkungsquerschnitt in der übernächstführenden Ordnung der QCD

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\text{NNLO}} &= \frac{\alpha_s^2}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n)} (2\text{Re}[\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{2Loop}}] + |\mathcal{A}_{\text{1Loop}}|^2) F_J^{(n)}(q_1, \dots, q_n) \\ &+ \frac{\alpha_s^2}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n+1)} 2\text{Re}[\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}*} \mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{\text{R}}] F_J^{(n)}(q_1, \dots, q_{n+1}) \\ &+ \frac{\alpha_s^2}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n+2)} |\mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{RR}}|^2 F_J^{(n)}(q_1, \dots, q_{n+2}) + \hat{\sigma}_{\text{NLO}} \end{aligned}$$

folgt analog zu $\hat{\sigma}_{\text{NLO}} = \hat{\sigma}^{\text{V}} + \hat{\sigma}^{\text{R}} + \hat{\sigma}^{\text{LO}}$. Die unterschiedlichen Phasenräume motivieren die Zerlegung $\hat{\sigma}_{\text{NNLO}} = \hat{\sigma}^{\text{VV}} + \hat{\sigma}^{\text{RV}} + \hat{\sigma}^{\text{RR}} + \hat{\sigma}_{\text{NLO}}$. Es soll nun der Zusammenhang zwischen

$\hat{\sigma}_{\text{NNLO}}^{tj}$ und $\hat{\sigma}_{\text{NLO}}^{tjj}$ diskutiert werden, wobei die Amplituden aus $\hat{\sigma}_{\text{NNLO}}^{tj}$ durch $\hat{\mathcal{A}}$ bezeichnet werden. Es gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_{\text{Born}}^{\text{R}} &= \mathcal{A}_{\text{Born}}, \\ \hat{\mathcal{A}}_{1\text{Loop}}^{\text{R}} &= \mathcal{A}_{1\text{Loop}} \text{ und} \\ \hat{\mathcal{A}}_{\text{Born}}^{\text{RR}} &= \mathcal{A}_{\text{Born}}^{\text{R}}.\end{aligned}$$

Die Amplituden zur Berechnung von $\hat{\sigma}^{\text{RR}}$ und $\hat{\sigma}^{\text{RV}}$ folgen daher aus der Berechnung von $\hat{\sigma}_{\text{NNLO}}^{tjj}$. Für die Bestandteile

$$|\hat{\mathcal{A}}_{1\text{Loop}}|^2 \text{ und } 2\text{Re} \left[\hat{\mathcal{A}}_{\text{Born}}^* \hat{\mathcal{A}}_{2\text{Loop}} \right]$$

in $\hat{\sigma}^{\text{VV}}$ gibt es hingegen kein Gegenstück in $\hat{\sigma}_{\text{NLO}}^{tjj}$. Im zweiten Beitrag treten Zweischleifenintegrale auf, die für den allgemeinen Fall ohne Näherungen in der Farbalgebra noch nicht bekannt sind [54].

3.2 Virtuelle Korrekturen

Zur Berechnung der virtuellen Korrekturen

$$\sigma^{\text{V}} = \frac{1}{2\hat{s}} \int d\Phi^{(n)} 2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^* (\mathcal{A}_{1\text{Loop}} + \mathcal{A}_{\text{CT}})] F_{\text{J}}^{(n)}(q_1, \dots, q_n)$$

muss die Einschleifen-Amplitude $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}$ mit der Born-Amplitude $\mathcal{A}_{\text{Born}}$ interferiert werden. Dabei ist $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}$ im allgemeinen sowohl UV- als auch IR-divergent. Die UV-Divergenzen können durch Renormierung entfernt werden. In der renormierten Störungstheorie kann dies durch einen Counterterms \mathcal{A}_{CT} (Unterabschnitt 3.2.3) realisiert werden. Die IR-Divergenzen hingegen kürzen sich erst nach Addition der reellen Korrekturen. Die Durchführung dieser Kürzung erfordert eine geeignete Regularisierung der Divergenzen. In dieser Arbeit wird die dimensionale Regularisierung verwendet, bei welcher der Schleifenimpuls k aus

$$\alpha_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu_R^{4-D} \alpha_s(\mu_R) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

als $D = 4 - 2\epsilon$ dimensional behandelt wird. Hierbei ist μ_R die Renormierungsskala. Nach Anwendung der dimensional Regularisierung liegen die Divergenzen als Pole in ϵ vor. Im Beispiel $e^+e^- \rightarrow u\bar{u}$ ist dies analytisch möglich. Bei Renormierung im $\overline{\text{MS}}$ Schema gilt in dimensionaler Regularisierung [55]

$$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}) = |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu_R^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left\{ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \pi^2 + O(\epsilon) \right\}.$$

Die UV-Divergenzen wurden bereits durch Renormierung mit einem Counterterm entfernt. $Q^2 = s > 0$ ist das Quadrat der Schwerpunktsenergie und Γ die Eulersche Gammafunktion. Nach dem Kürzen der IR-Divergenzen ist die Rückkehr zu vier Dimensionen durch die Wahl $\epsilon = 0$ mit anschließender Integration über den Phasenraum möglich.

Bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks treten analog Pole der Ordnung ϵ^{-2} und ϵ^{-1} sowie ein endlicher Anteil auf,

$$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon \left\{ \frac{c_2}{\epsilon^2} + \frac{c_1}{\epsilon} + c_0 + O(\epsilon) \right\},$$

wobei ein anderer Vorfaktor ausgeklammert wurde. Ziel ist nun, die vom Phasenraumpunkt abhängigen Zahlen c_2 , c_1 und c_0 zu berechnen. Die Berechnung von c_2 und c_1 erlaubt, die Kürzung der IR-Divergenzen explizit für jeden Phasenraumpunkt zu überprüfen. Bei Verwendung des gleichen Vorfaktors $\Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon$ in allen Komponenten der Korrekturen in NLO QCD geht in die numerische Berechnung des Wirkungsquerschnitts allein die Zahl c_0 ein. Die Beiträge in Ordnung $O(\epsilon)$ verschwinden im Limes $D \rightarrow 4$, der nach dem Kürzen der Divergenzen gebildet werden kann, und werden daher nicht benötigt. Bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets treten bei der Berechnung der Schleifendiagramme Tensorintegrale mit bis zu fünf Propagatoren auf. Die Zahlen c_2 , c_1 und c_0 werden wegen der Komplexität der Ausdrücke numerisch berechnet.

3.2.1 Zerlegung der Einschleifen-Amplitude

Die Diagramme der Einschleifen-Amplitude für den Prozess $ub \rightarrow tdg$ wurden mit dem Programm QGRAF [56] erzeugt (Anhang A.3). Es wurden nur amputierte Diagramme berücksichtigt, das heißt alle externen Teilchen liegen auf ihrer Massenschale. Weiterhin wurden Diagramme mit Schleifen aus einem einzelnen Propagator nicht erzeugt. Im Fall eines Quarks in der Schleife verschwinden diese Diagramme wegen der Spurlosigkeit der Generatoren der SU(3) Farbalgebra, $\text{Sp}(T^a) = 0$. Bei einem Gluon in der Schleife verschwindet das entsprechende Integral in dimensionaler Regularisierung wegen der Abwesenheit einer dimensionsbehafteten Größe.

Im Computeralgebrasystem FORM [34] wurden die Feynman-Regeln eingesetzt und algebraische Umformungen vorgenommen. Zur numerischen Berechnung der virtuellen Korrekturen $2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}})$ müssen die in $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}$ enthaltenen Tensorintegrale auf skalare Integrale zurückgeführt werden. Diese Rückführung und die Berechnung der skalaren Integrale selbst ist maßgeblich für den erforderlichen Rechenaufwand. Zunächst wird jedoch auf die Farbalgebra und die Abhängigkeit vom Spin des Top-Quarks sowie der Polarisation des auslaufenden Gluons eingegangen.

Farbanteil

Analog zur Born-Amplitude

$$\mathcal{A}_{\text{Born}} = \delta_{bt} T_{du}^g \mathcal{A}_{\text{Born}}^l + \delta_{ud} T_{tb}^g \mathcal{A}_{\text{Born}}^s$$

lässt sich die Einschleifen-Amplitude des Prozesses $ub \rightarrow tdg$

$$\mathcal{A}_{1\text{Loop}} = \delta_{bt} T_{du}^g \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^l + \delta_{ud} T_{tb}^g \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^s + \delta_{ut} T_{db}^g \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_1} + \delta_{db} T_{tu}^g \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_2}$$

in verschiedene Farbstrukturen zerlegen. Die beiden neuen Beiträge kommen aus der Teilamplitude $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^E$ mit Farbaustausch zwischen den beiden Quark-Linien,

$$\begin{aligned} T_{tb}^a T_{dj}^a T_{ju}^g &= T_f \left(\delta_{tj} \delta_{bd} - \frac{1}{N_C} \delta_{tb} \delta_{dj} \right) T_{ju}^g = \delta_{bd} T_{tu}^g T_f + \delta_{bt} T_{du}^g \left(\frac{-T_f}{N_C} \right) \\ T_{du}^a T_{tj}^a T_{jb}^g &= T_f \left(\delta_{dj} \delta_{ut} - \frac{1}{N_C} \delta_{du} \delta_{tj} \right) T_{jb}^g = \delta_{ut} T_{db}^g T_f + \delta_{ud} T_{tb}^g \left(\frac{-T_f}{N_C} \right), \end{aligned}$$

diese tragen auch zu $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^l$ und $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^s$ bei. Analog zur Berechnung von $|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2$ wird in

$$\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}} = \left(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l \quad \mathcal{A}_{\text{Born}}^s \right)^* C_{1\text{Loop}} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^l \\ \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^s \\ \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_1} \\ \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_2} \end{pmatrix}$$

eine Farbmatrix

$$C_{1\text{Loop}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

eingeführt. Diese hat neben den Einträgen von C_{Born} die neuen Einträge

$$\begin{aligned} C_{13} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{db}^g \delta_{ut}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F, \\ C_{14} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{tu}^g \delta_{db}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F, \\ C_{23} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{db}^g \delta_{ut}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F \text{ und} \\ C_{24} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{tu}^g \delta_{db}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F \end{aligned}$$

mit $N_C = 3$ und $C_F = \frac{4}{3}$.

Resonante Diagramme im Prozess $gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$

Die beiden Prozesse $gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ und $bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ tragen sowohl zur Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit Jets als auch zur Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson bei. Die Beiträge zur Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson enthalten dabei resonante Diagramme. Bei der Zerlegung von $\mathcal{A}_{\text{Born}}$ in $\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$ und $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ in der führenden Ordnung besteht $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ aus nicht resonanten und $\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$ aus resonanten Diagrammen. Der Interferenzterm verschwindet durch die Farbalgebra. In den virtuellen Korrekturen der nächstführenden Ordnung wird die Zuordnung der Beiträge durch das Auftreten eines Interferenzterms erschwert.

Analog zur führenden Ordnung enthält die Teilamplitude $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^l$ nur nicht resonante Diagramme und die Teilamplitude $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^s$ nur resonante Diagramme. Die Teilamplituden $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_1}$ und $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_2}$ enthalten hingegen sowohl resonante als auch nicht resonante Diagramme. Die Zuordnung von $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ zur Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit Jets entspricht der Modifikation $C_{21} = C_{22} = C_{23} = C_{24} = 0$ der Farbmatrix. Neben rein nicht resonanten Beiträgen verbleibt ein Interferenzterm aus $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$ und $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_1}$ sowie $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{g_2}$. In diesem Beitrag findet ein Farbaustausch zwischen der leichten und der schweren Quark-Linie statt. Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich bei der Auswertung ein Hauptwertintegral. Der entsprechende Beitrag muss numerisch vernachlässigbar gegenüber dem Gesamtwirkungsquerschnitt sein, damit die Unterscheidung zwischen der Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit Jets und der Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson begründet ist. Auf die Vorgehensweise in den reellen Korrekturen wird im Unterabschnitt 3.3.4 eingegangen.

Abhängigkeit von der Helizität des Top-Quarks und von der Polarisation des Gluons

Nach dem Ausführen der Farbalgebra muss $\mathcal{A}_{1\text{Loop}}^x$ mit $x \in \{l, s, g_1, g_2\}$ berechnet werden. Dabei gibt es eine Abhängigkeit von der Helizität des Top-Quarks und von der Polarisation

des auslaufenden Gluons. Die Helizitäten der masselosen Quarks sind hingegen durch die Kopplung an das W -Boson festgelegt. Dies ergibt wegen $s_g \in \{+, -\}$ und $s_t \in \{+, -\}$ insgesamt vier Möglichkeiten. Die Schleifenintegrale sind von dieser Abhängigkeit nicht betroffen. Dies erlaubt eine Zerlegung in einen Anteil D mit den Tensorintegralen und in einen Anteil mit Spinstrukturen S mit der Abhängigkeit von s_g und s_t . Die Summation über i in der Zerlegung

$$\mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{x, s_g s_t} = \sum_i S_i^{s_g s_t} D_i^x \text{ mit } x \in \{l, s, g_1, g_2\} \quad (3.1)$$

läuft über einen Satz von voneinander verschiedenen S_i , der nach dem Ordnen der Spinstrukturen in eine festgelegte Reihenfolge gefunden wurde. Die Anteile D_i werden so gewählt, dass die Definition der Tensorintegrale direkt angewandt werden kann. Die Spinstrukturen S_i werden im Spinor-Helizitätsformalismus berechnet und numerisch durch Spinorprodukte und Viererprodukte ausgewertet. Die Born-Diagramme werden zur Berechnung der Interferenz analog numerisch bestimmt. Die Spinorprodukte sind für Impulse p und q mit $p^2 = q^2 = 0$ durch [57]

$$\langle p- | q+ \rangle := \langle p, q \rangle = \frac{1}{\sqrt{|p_+||q_+|}} (p_\perp^* q_+ - p_+ q_\perp^*) \cdot \kappa \text{ und } \langle p+ | q- \rangle := [p, q] = \frac{2(pq)}{\langle q, p \rangle}$$

mit $p_+ = p^0 + p^3$ und $p_\perp = p_1 + ip_2$, analog für q , definiert. Für $p^0 > 0$ und $q^0 > 0$ gilt $\kappa = 1$. Für $p^0 q^0 < 0$ gilt $\kappa = -i$ und bei $p^0 < 0$ und $q^0 < 0$ gilt $\kappa = -1$. Diese Definition der Spinorprodukte korrespondiert mit den Impulsen der einlaufenden Hadronen aus Gl. (2.7), bei denen die z -Achse als Strahlachse gewählt wurde.

Für einen massiven Impuls k mit $k^2 = m^2$ ist eine Zerlegung in Impulse a und b mit $a^2 = b^2 = 0$ erforderlich. Für einen gegebenen Impuls a mit $(ak) \neq 0$ folgt b durch

$$b^\mu = k^\mu - \alpha a^\mu \text{ mit } \alpha = \frac{k^2}{2(ak)}.$$

Für den Spinor eines Top-Quarks gilt mit dieser Zerlegung [57]

$$\bar{u}(k, +) = \frac{1}{\langle a, b \rangle} \langle a- | (\not{k} + m) \text{ und } \bar{u}(k, -) = \frac{1}{[a, b]} \langle a+ | (\not{k} + m).$$

Für die Polarisation des Gluons gilt mit einem masselosen Hilfsvektor b [57]

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^\pm(q, b) &= \pm \frac{\langle q\pm | \gamma_\mu | b\pm \rangle}{\sqrt{2} \langle b\mp | p\pm \rangle}, \\ \epsilon_\mu^+(q, b) \gamma^\mu &= \frac{\sqrt{2} (| q- \rangle \langle b- | + | b+ \rangle \langle q+ |)}{\langle b, q \rangle} \text{ und} \\ \epsilon_\mu^-(q, b) \gamma^\mu &= \frac{\sqrt{2} (| q+ \rangle \langle b+ | + | b- \rangle \langle q- |)}{[q, b]}. \end{aligned}$$

Für Vektoren p mit $p^2 = 0$ gilt dann

$$\epsilon_\mu^+(q, b) p^\mu = \frac{\langle p, b \rangle [q, p]}{\sqrt{2} \langle b, q \rangle} \text{ und } \epsilon_\mu^-(q, b) p^\mu = \frac{[p, b] \langle q, p \rangle}{\sqrt{2} [q, b]}$$

für Kontraktionen mit dem Polarisationsvektor des Gluons. Für eichinvariante Teilamplituden muss die Abhängigkeit vom Hilfsvektor b verschwinden.

Wahl des Regularisierungsschemas

Zur numerischen Auswertung von S werden Identitäten mit Dirac-Matrizen

$$\begin{aligned}
\langle 1- | \gamma_\mu | 2- \rangle \langle 3- | \gamma^\mu | 4- \rangle &= [24] \langle 31 \rangle, \\
\langle 1- | \gamma_\mu \gamma_\nu | 2+ \rangle \langle 3- | \gamma^\mu \gamma^\nu | 4+ \rangle &= 8 \langle 42 \rangle \langle 31 \rangle, \\
\langle 1- | \gamma_\mu \gamma_\nu | 2+ \rangle \langle 3+ | \gamma^\mu \gamma^\nu | 4- \rangle &= 4 \langle 12 \rangle [34], \\
\langle 1+ | \gamma_\mu \gamma_\nu | 2- \rangle \langle 3+ | \gamma^\mu \gamma^\nu | 4- \rangle &= 8 [13] [24], \\
\langle 1- | \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho | 2- \rangle \langle 3- | \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho | 4- \rangle &= 32 [24] \langle 31 \rangle \text{ und} \\
\langle 1- | \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho | 2- \rangle \langle 3- | \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu | 4- \rangle &= 8 \langle 13 \rangle [42]
\end{aligned}$$

mit $[24] := [p_2, p_4]$ und $\langle 31 \rangle := \langle p_3, p_1 \rangle$ benötigt. Produkte aus Dirac-Matrizen in S müssen im Allgemeinen umgeformt werden, bevor diese Identitäten verwendet werden können. In vier Dimensionen gilt dabei für die Dirac-Matrizen

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I_4 \text{ und } \gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5.$$

Bei dimensionaler Regularisierung in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen müssen diese Gleichungen im Allgemeinen modifiziert werden. Das „naive Schema“ $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ für γ_5 darf in dieser Rechnung weiter verwendet werden, da das W -Boson bei der Produktion von einzelnen Top-Quarks nicht an geschlossene Quark-Schleifen koppelt [58]. Im konventionellen Schema der dimensionalen Regularisierung (CDR-Schema) gilt

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = DI_D = (4 - 2\epsilon)I_D$$

für Kontraktionen von Dirac-Matrizen. Der Beitrag von der Ordnung $O(\epsilon)$ kann zu einem endlichen Beitrag führen, wenn er auf einen UV-Pol aus Schleifenintegralen trifft. Die Kontraktion von Dirac-Matrizen mit $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I_4$ führt hingegen zu einem Ergebnis im DRED-Schema der dimensionalen Regularisierung. Die Renormierungskonstanten für die Berechnung des Counterterms sind im Allgemeinen von der Wahl des Regularisierungsschemas abhängig.

3.2.2 Berechnung der Schleifenintegrale

Dieser Unterabschnitt behandelt die Reduktion von Tensorintegralen

$$I_N^{\mu_1 \dots \mu_R}(q_0, \dots, q_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) = \frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \int d^D k \prod_{i=0}^{N-1} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_R}}{(k + q_i)^2 - m_i^2 + i0}$$

auf skalare Integrale

$$I_N(q_0, \dots, q_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) = \frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \int d^D k \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{(k + q_i)^2 - m_i^2 + i0}$$

in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen. Diese Integrale treten nach dem Übergang in D Dimensionen durch

$$\alpha_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \alpha_s(\mu) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} = \alpha_s(\mu) \left(\frac{i}{16\pi^2} \right) \left(\frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \right) \int d^D k$$

in den Anteilen D_i^x der Zerlegung aus Gl. (3.1) auf. Die Integrale hängen von den Massen m_0, \dots, m_{N-1} und von externen Impulsen ab, aus denen interne Impulse q_0, \dots, q_{N-1} berechnet werden können. Die numerische Berechnung der skalaren Integrale wurde mit der Bibliothek `QCDLoop` [59] durchgeführt, diese Bibliothek bindet wiederum die Bibliothek `FF` [60] ein.

Die Reduktion der Tensorintegrale wurde mit drei verschiedenen Methoden vorgenommen, deren numerische Implementierungen in Bibliotheken bereits vorhanden waren. Für Integrale mit zwei (B-Integrale) oder drei (C-Integrale) Propagatoren wurde die Reduktion nach Passarino und Veltman [61] implementiert durch [62] verwendet. Für D- und E-Integrale wurde zum einen die Reduktion durch auf partieller Integration basierenden Relationen in [63] implementiert durch [62] verwendet. Zum anderen wurde die numerische Rückführung der D- und E-Integrale auf skalare Integrale aus `QCDLoop` mit der Bibliothek `PJFry` [64] implementiert. Die theoretischen Grundlagen von `PJFry` werden in [65] beschrieben.

Reduktion nach Passarino und Veltman

Das Prinzip soll zunächst am Beispiel des Tensorintegrals

$$B^\mu(p_1, m_1, m_2) = \frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m_1^2 + i0) [(k + p_1)^2 - m_2^2 + i0]}$$

verdeutlicht werden [61]. Wegen der Lorentz-Kovarianz des Tensorintegrals ist ein Ansatz $B^\mu(p_1, m_0, m_1) = p_1^\mu B_1(p_1, m_0, m_1)$ mit einem Lorentz-Skalar $B_1(p_1, m_0, m_1)$ möglich. Das Produkt des Tensorintegrals B^μ mit dem Impuls p_1

$$\begin{aligned} 2p_1^2 B_1(p_1, m_0, m_1) &= \frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{2(kp_1)}{(k^2 - m_1^2 + i0) [(k + p_1)^2 - m_2^2 + i0]} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{[(k + p_1)^2 - m_2^2] - [k^2 - m_1^2] + [m_2^2 - m_1^2 - p_1^2]}{(k^2 - m_1^2 + i0) [(k + p_1)^2 - m_2^2 + i0]} \\ &= A(m_1) - A(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) B(p_1, m_1, m_2) \end{aligned}$$

kann durch skalare Integrale ausgedrückt werden. Für den Koeffizienten wurde somit

$$B_1(p_1, m_1, m_2) = \frac{1}{2p_1^2} [A(m_1) - A(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) B(p_1, m_1, m_2)]$$

gezeigt. Diese Reduktion kann auf Tensorintegrale mit mehr Propagatoren und mit höherem Rang verallgemeinert werden [61]. Zwischen den Tensorintegralen und den Reduktionskoeffizienten gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned} B^\mu &= p_1^\mu B_1, \\ B^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_1^\nu B_{11}, \\ C^\mu &= p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2 \text{ und} \\ C^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} C_{00} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) C_{12} + p_1^\mu p_1^\nu C_{11} + p_2^\mu p_2^\nu C_{22} \end{aligned}$$

mit $p_1 = q_1$ und $p_2 = (q_2 - q_1)$. Die verwendete Bibliothek erlaubt die numerische Berechnung der Reduktionskoeffizienten ausgehend von den externen Impulsen und den in

den Propagatoren auftretenden Massen. Die UV-Divergenzen der Tensorintegrale können explizit angegeben werden. Für die skalaren Integrale gilt [66]

$$A^{\text{UV}} = \frac{m_0^2}{\epsilon}, \quad B^{\text{UV}} = \frac{1}{\epsilon}, \quad C^{\text{UV}} = 0 \text{ und } D^{\text{UV}} = 0.$$

Für die Reduktionskoeffizienten folgt daraus [67]

$$B_1^{\text{UV}} = -\frac{1}{2\epsilon} \text{ und } C_{00}^{\text{UV}} = \frac{1}{4\epsilon}.$$

Im CDR-Schema der dimensional Regularisierung führen diese UV-Pole bei der Kombination mit $\gamma_\mu \gamma^\mu = DI_D$ zu endlichen Beiträgen für die virtuellen Korrekturen.

Reduktion durch partielle Integration

Bei dieser Methode werden die Tensorintegrale in einem ersten Schritt durch skalare Integrale in höheren Dimensionen

$$I_n(\tilde{D}, \{\alpha_i\}) = \frac{1}{i\pi^{\tilde{D}/2}} \int d\tilde{D}k \prod_{i=1}^n [(k + q_i)^2 - m_i^2 + i0]^{-\alpha_i} \quad (3.2)$$

mit $\tilde{D} \in \{6, 8, \dots\}$ ausgedrückt. Durch $\{\alpha_i\}$ werden die Exponenten der Propagatoren spezifiziert. In einem zweiten Schritt werden die skalaren Integrale in \tilde{D} Dimensionen numerisch auf die skalaren Integrale in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen I_N reduziert [63]. Die Formel zur Reduktion der Tensorintegrale

$$I_n^{\mu_1 \dots \mu_R}(\tilde{D}, \{1\}) = \sum_{\lambda, \kappa_1, \dots, \kappa_R} \delta(2\lambda + \sum_i \kappa_i - R) \left(-\frac{1}{2}\right)^\lambda \{[g]^\lambda [q_1]^{\kappa_1} \dots [q_R]^{\kappa_R}\}_{\mu_1 \dots \mu_R} \\ \times I_n(\tilde{D} + 2(R - \lambda); 1 + \kappa_1, \dots, 1 + \kappa_R)$$

folgt durch partielle Integration [68]. Die Summe läuft über nicht negative ganze Zahlen $\lambda, \kappa_1, \dots, \kappa_R$ mit der Bedingung $2\lambda + \sum_{i=1}^R \kappa_i = R$. Die Notation

$$\{[g]^\lambda [q_1]^{\kappa_1} \dots [q_R]^{\kappa_R}\}_{\mu_1 \dots \mu_R}$$

steht für die Summe aller Beiträge, in denen die R Indices μ_i auf λ Versionen der Metrik und jeweils κ_i Versionen des Impulses q_i verteilt werden. Gleiche Impulse führen dabei zu einem Faktor $(\kappa_i!)$. Die Fälle

$$\begin{aligned} \{q_1 q_2 q_3\}^{\mu\nu\rho} &= q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho + q_1^\mu q_3^\nu q_2^\rho + q_2^\mu q_1^\nu q_3^\rho + q_2^\mu q_3^\nu q_1^\rho + q_3^\mu q_1^\nu q_2^\rho + q_3^\mu q_2^\nu q_1^\rho, \\ \{q_1 q_1 q_2\}^{\mu\nu\rho} &= 2q_1^\mu q_1^\nu q_2^\rho + 2q_1^\mu q_2^\nu q_1^\rho + 2q_2^\mu q_1^\nu q_1^\rho \text{ und} \\ \{gq\}^{\mu\nu\rho} &= g^{\mu\nu} q^\rho + g^{\mu\rho} q^\nu + g^{\nu\rho} q^\mu \end{aligned}$$

werden im Folgenden benötigt. Für die D-Integrale folgt nach dem Anwenden der Reduktionsformel

$$\begin{aligned} D^\mu(q_1, q_2, q_3) &= q_1^\mu D(6; 1, 2, 1, 1) + q_2^\mu D(6; 1, 1, 2, 1) + q_3^\mu D(6; 1, 1, 1, 2) \text{ und} \\ D^{\mu\nu}(q_1, q_2, q_3) &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D(6; 1, 1, 1, 1) \\ &\quad + 2q_1^\mu q_1^\nu D(8; 1, 3, 1, 1) + 2q_1^\mu q_1^\nu D(8; 1, 1, 3, 1) + 2q_1^\mu q_1^\nu D(8; 1, 1, 1, 3) \\ &\quad + (q_1^\mu q_2^\nu + q_1^\nu q_2^\mu) D(8; 1, 2, 2, 1) + (q_1^\mu q_3^\nu + q_1^\nu q_3^\mu) D(8; 1, 2, 1, 2) \\ &\quad + (q_2^\mu q_3^\nu + q_2^\nu q_3^\mu) D(8; 1, 1, 2, 2). \end{aligned}$$

Die Exponenten $\{\alpha_i\}$ für die skalaren Integrale in höheren Dimensionen aus Gl. (3.2) werden auf der rechten Seite jeweils explizit angegeben. Wegen der Wahl $q_4 = 0$ treten keine Beiträge mit diesem Vierervektor auf. Für D-Integrale mit Tensorrang 3 gilt

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3) = & -\frac{1}{2}\{gq_1\}^{\mu\nu\rho}D(8; 1, 2, 1, 1) - \frac{1}{2}\{gq_2\}^{\mu\nu\rho}D(8; 1, 1, 2, 1) \\
& -\frac{1}{2}\{gq_3\}^{\mu\nu\rho}D(8; 1, 1, 1, 2) \\
& +6q_1^\mu q_1^\nu q_1^\rho D(10; 1, 4, 1, 1) + 6q_2^\mu q_2^\nu q_2^\rho D(10; 1, 1, 4, 1) \\
& +6q_3^\mu q_3^\nu q_3^\rho D(10; 1, 1, 1, 4) \\
& +\{q_1 q_1 q_2\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 3, 2, 1) + \{q_1 q_1 q_3\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 3, 1, 2) \\
& +\{q_1 q_2 q_2\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 2, 3, 1) + \{q_2 q_2 q_3\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 1, 3, 2) \\
& +\{q_1 q_3 q_3\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 2, 1, 3) + \{q_2 q_3 q_3\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 1, 2, 3) \\
& +\{q_1 q_2 q_3\}^{\mu\nu\rho}D(10; 1, 2, 2, 2).
\end{aligned}$$

Für die E-Integrale mit Rang 1 bis 3 gelten analoge Formeln mit einer höheren Anzahl an Summanden.

Rückführung in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen

Durch partielle Integration können Relationen zwischen skalaren Integralen in verschiedenen Dimensionen und mit verschiedenen Exponenten der Propagatoren gefunden werden. In [63] wird ein Satz von Relationen angegeben, durch den eine systematische Rückführung in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen möglich ist. Zur Anwendung auf das Tensorintegral

$$B_\mu(p_1, m_1, m_2) = p_1 B(6; 1, 2)$$

wird exemplarisch

$$\begin{aligned}
& (\nu_k - 1)I_N(D; \{\nu_l\}) \\
& = -\frac{b_k}{B}I_N(D - 2; \{\nu_l - \delta_{lk}\}) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{b_k b_i}{B} - S_{ki}^{-1} \right) I_N(D - 2; \{\nu_l - \delta_{li} - \delta_{lk}\})
\end{aligned}$$

mit $S_{ij} = (q_i - q_j)^2 - m_i^2 - m_j^2$ sowie $b_i = \sum_j S_{ij}^{-1}$, $B = \sum b_i$ angegeben, Gl. (2.21 [63]). Auf der rechten Seite ist die Dimension der Integrale jeweils um 2 verringert. Im Beispiel folgt für die kinematische Matrix und die daraus berechneten Vorfaktoren

$$\begin{aligned}
S_{ij} &= \begin{pmatrix} -2m_1^2 & p_1^2 - m_1^2 - m_2^2 \\ p_1^2 - m_1^2 - m_2^2 & -2m_2^2 \end{pmatrix}, \\
\frac{b_2}{B} &= \frac{m_1^2 - m_2^2 + p_1^2}{2p_1^2}, \\
\left[\frac{b_1^2}{B} - S_{21}^{-1} \right] &= -\frac{1}{2p_1^2} = -\left[\frac{b_1 b_2}{B} - S_{22}^{-1} \right].
\end{aligned}$$

Anwenden der Relation für $\kappa = 2$ ergibt

$$\begin{aligned}
B(6; 1, 2) &= -\frac{b_2}{B}B(4; 1, 1) + \left[\frac{b_2 b_1}{B} - S_{21}^{-1} \right] B(4; 0, 1) + \left[\frac{b_2 b_2}{B} - S_{22}^{-1} \right] B(4; 1, 0) \\
&= \frac{m_2^2 - m_1^2 - p_1^2}{2p_1^2} B(4; 1, 1) + \frac{B(4; 1, 0)}{2p_1^2} - \frac{B(4; 0, 1)}{2p_1^2}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt wegen $B(4; 1, 0) = A(m_1)$ und $B(4; 0, 1) = A(m_2)$ mit der Reduktion nach Passarino und Veltman

$$2p_1^2 B(6; 1, 2) = (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) B(4; 1, 1) + B(4; 1, 0) - B(4; 0, 1)$$

überein.

Reduktion mit PJFRY

In der Bibliothek PJFRY [64] wird eine Reduktion von Tensorintegralen mit fünf Propagatoren verwendet, die numerische Probleme bei der Auswertung von Determinanten verringert. Neben [68] bildet [69] eine wichtige Grundlage dieser Reduktion. Grundidee von PJFRY ist die Relation [65]

$$I_5^{\mu_1 \dots \mu_{R-1} \mu} = I_5^{\mu_1 \dots \mu_{R-1}} Q_0^\mu - \sum_{s=1}^5 I_4^{\mu_1 \dots \mu_{R-1}, s} Q_s^\mu,$$

welche E-Integrale mit Rang R durch E-Integrale mit Rang $(R-1)$ und D-Integrale mit Rang $(R-1)$ ausdrückt. Zur Berechnung der Vektoren Q_0, \dots, Q_5 müssen Determinanten aus Impulsen ausgewertet werden. Das skalare E-Integral kann ebenfalls durch skalare D-Integrale ausgedrückt werden. Die Notation für die Reduktion auf Tensorkoeffizienten bei der Benutzung dieser Bibliothek, z. B.

$$\begin{aligned} D^\mu &= q_1^\mu D_1 + q_2^\mu D_2 + q_3^\mu D_3 \text{ und} \\ D^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} D_{00} + (q_1^\mu q_2^\nu + q_1^\nu q_2^\mu) D_{12} + (q_1^\mu q_3^\nu + q_1^\nu q_3^\mu) D_{13} + (q_2^\mu q_3^\nu + q_2^\nu q_3^\mu) D_{23} \\ &+ q_1^\mu q_1^\nu D_{11} + q_2^\mu q_2^\nu D_{22} + q_3^\mu q_3^\nu D_{33}, \end{aligned}$$

lehnt sich an die Notation für die Reduktion nach Passarino und Veltman an. Die Tensorintegrale $D^{\mu\nu\rho}$, E^μ , $E^{\mu\nu}$ und $E^{\mu\nu\rho}$ sind analog definiert. Die Bibliothek erlaubt nun die numerische Berechnung der Tensorkoeffizienten für gegebene Viererprodukte der externen Impulse und Massen der Propagatoren.

3.2.3 Renormierung

Der Counterterm folgt durch Renormierung der Quarkfelder ψ_q , der Quarkmassen m_q , des Gluonfelds A und der Kopplungskonstanten g_s . Dies erfolgt durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \psi_{q,k}^0 &= \sqrt{Z_q} \psi_{q,k}, \\ m_q^0 &= Z_{m,q} m_q, \\ g_s^0 &= \sqrt{Z_\alpha} g_s \text{ und} \\ A_\mu^0 &= \sqrt{Z_A} A_\mu \end{aligned}$$

in der Lagrange-Dichte aus dem Abschnitt 2.2. Die Konstanten Z können in α_s entwickelt werden, $Z = 1 + \delta Z + O(\alpha_s)^2$. Die Renormierungskonstanten δZ sind von der Ordnung $O(\alpha_s)$ und werden später angegeben. Für den Quarkpropagator und die Quark-Gluon

Wechselwirkung folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{QCD},\psi}^0 &= \sum_q \bar{\psi}_{q,j}^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{jk} - \delta_{jk} m_q^0 + g_s^0 \gamma^\mu A_\mu^{a,0} T_{jk}^a) \psi_{q,k}^0 \\
&= \mathcal{L}_{\text{QCD},\psi} + \sum_q [(Z_q - 1) \bar{\psi}_{q,j} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{q,j} - m_q (Z_{m,q} Z_q - 1) \bar{\psi}_{q,j} \psi_{q,j} \\
&\quad + (Z_q \sqrt{Z_\alpha Z_A} - 1) g_s \bar{\psi}_{q,j} \gamma^\mu A_\mu^a T_{jk}^a \psi_{q,k}].
\end{aligned}$$

Für die Quark- W -Boson Wechselwirkung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Wud}^0 &= -\frac{g_w}{2\sqrt{2}} [\bar{u}^0 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ d^0 V_{ud}] - \frac{g_w}{2\sqrt{2}} [\bar{d}^0 V_{ud}^* \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- u^0] \\
&= -\left(\sqrt{Z_u Z_d} - 1\right) \frac{g_w}{2\sqrt{2}} [\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ d V_{ud} + \bar{d} V_{ud}^* \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- u]
\end{aligned}$$

müssen nur die Quark-Felder renormiert werden. Es folgen die Counterterm Feynman-Regeln

$$V_\mu^{QQW,\text{CT}} = -\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{Z_u Z_d} - 1\right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) V_{fg}$$

und

$$V_\mu^{QQG,\text{CT}} = ig_s \left(Z_q \sqrt{Z_\alpha Z_A} - 1\right) \gamma_\mu T_{ij}^a$$

für die Dreiervertices. Darüber hinaus gibt es eine Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned}
V^{QQ,\text{CT}} &= i[(Z_q - 1) \gamma^\mu p_\mu - m_q (Z_{m,q} Z_q - 1)] \\
&= i[(Z_q - 1) (\not{p} - m_q) + m_q Z_q (1 - Z_{m,q})]
\end{aligned}$$

für Quarks. Im masselosen Fall ist dieser Counterterm proportional zur Born-Amplitude. Im massiven Fall tritt ein zusätzlicher Beitrag auf, der nicht proportional zur Born-Amplitude ist.

Renormierungskonstanten

In [70] werden die Renormierungskonstanten in Abhängigkeit von der Größe

$$\Delta_1(\mu) = \frac{\Gamma(1 + \epsilon)}{\epsilon} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_t^2}\right)^\epsilon$$

im CDR-Schema der dimensional Regularisierung angegeben. Es kann dabei zwischen UV-Polen Δ_1^{UV} und IR-Polen Δ_1^{IR} unterschieden werden. Dies erlaubt es, die Kürzung von UV- und IR-Polen getrennt zu überprüfen. Für die Kopplungskonstante α_s gilt im $\overline{\text{MS}}$ -Schema

$$\delta Z_\alpha = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{n_f}{3} - \frac{11}{2}\right) \Delta_1^{\text{UV}}(m_t) + \frac{\alpha_s}{6\pi} \Delta_1^{\text{UV}}(\mu).$$

Die Renormierungskonstanten der Wellenfunktionen im On-Shell-Schema sind

$$\begin{aligned}\delta Z_q &= -\frac{\alpha_s}{3\pi} [\Delta_1^{\text{UV}}(\mu) - \Delta_1^{\text{IR}}(\mu)] \text{ mit } q \in \{u, d, c, s, b\}, \\ \delta Z_t &= -\frac{\alpha_s}{3\pi} [\Delta_1^{\text{UV}}(\mu) + 2\Delta_1^{\text{IR}}(\mu) + 4] \text{ und} \\ \delta Z_A &= -\frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{n_f}{3} - \frac{5}{2} \right) [\Delta_1^{\text{UV}}(\mu) - \Delta_1^{\text{IR}}(\mu)] - \frac{\alpha_s}{6\pi} \Delta_1^{\text{UV}}(\mu).\end{aligned}$$

Die Renormierung der Masse des Top-Quarks

$$\delta Z_m = -\frac{\alpha_s}{3\pi} [3\Delta_1^{\text{UV}}(\mu) + 4]$$

erfolgt ebenfalls im On-Shell-Schema. Nach der Anpassung an die Konventionen dieser Arbeit durch

$$\Delta_1(\mu) = \Delta_1(m_t) \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right)^\epsilon = \Delta_1(m_t) \left[1 + \epsilon \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + O(\epsilon^2) \right]$$

folgt für das Top-Quark

$$\begin{aligned}\delta Z_m &= -\frac{\alpha_s}{3\pi} \left[3\Delta_1^{\text{UV}}(m_t) + 4 + 3 \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \text{ und} \\ \delta Z_t &= -\frac{\alpha_s}{3\pi} \left[\Delta_1^{\text{UV}}(m_t) + 2\Delta_1^{\text{IR}}(m_t) + 4 + 3 \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right].\end{aligned}$$

Berechnung des Counterterms

Aus der Renormierung der Quark- W -Boson Vertices folgt ein Anteil

$$\mathcal{A}_{\text{CT}}^{QQW} = \frac{1}{2} [3(\delta Z_q) + \delta Z_t] \mathcal{A}_{\text{Born}}.$$

Beim Anteil aus der Renormierung der Quark-Gluon Vertices

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{CT}}^g &= \left(\frac{1}{2} \delta Z_A + \frac{1}{2} \delta Z_\alpha + \delta Z_q \right) [\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3] \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \delta Z_A + \frac{1}{2} \delta Z_\alpha + \delta Z_t \right) \mathcal{A}_4\end{aligned}$$

ist \mathcal{A}_4 das Diagramm mit Gluonabstrahlung vom Top-Quark. Der Anteil aus der Renormierung der Quark-Zweipunktfunktion

$$\mathcal{A}_{\text{CT}}^{QQ} = -\delta Z_q (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3) - \delta Z_t \mathcal{A}_4 + \delta Z_m \mathcal{A}_5$$

enthält eine neue Amplitude

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_5 &= \left(\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 (ig_s T_{tb}^g) \delta_{ud} \frac{-i}{(p_1 - q_1)^2 - m_w^2} \left[i \frac{q_{2,\gamma} + q_{3,\gamma} + m_t}{(q_2 + q_3)^2 - m_t^2} \right] \left[i \frac{q_{2,\delta} + q_{3,\delta} + m_t}{(q_2 + q_3)^2 - m_t^2} \right] \\ &\quad \times \bar{u}(q_1) V_{ud}^* \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(q_2) \not{q}_3 \gamma_\gamma [-im] \gamma_\delta V_{tb} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_2),\end{aligned}$$

welche im Spinor-Helizitätsformalismus numerisch ausgewertet wird. Es wurde die Kürzung

$$\left[i \frac{\not{p} + m I_4}{p^2 - m^2} \right] \left[i (\not{p} - m I_4) \right] = - \frac{p^2 - m^2}{p^2 - m^2} I_4 = -I_4$$

zwischen dem Propagator und dem Counterterm-Vertex ausgenutzt. Die Summe aller Anteile ergibt

$$\mathcal{A}_{\text{CT}} = \frac{1}{2} (3(\delta Z_q) + \delta Z_t + \delta Z_\alpha + \delta Z_A) \mathcal{A}_{\text{Born}} + \delta Z_m \mathcal{A}_5$$

für den Counterterm. Da \mathcal{A}_5 den gleichen Farbfaktor wie $\mathcal{A}_{\text{Born}}^s$ enthält, kann dieses Produkt numerisch analog zu $|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2$ mit Hilfe der Farbmatrix berechnet werden.

Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ_R

Der Wirkungsquerschnitt

$$\hat{\sigma} = \alpha_s \hat{\sigma}_0 + \alpha_s^2 \hat{\sigma}_1(\mu_R) + O(\alpha_s^3)$$

hat wegen $\alpha_s = \alpha_s(\mu_R)$ eine implizite Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ_R . Diese implizite Abhängigkeit kann für $\hat{\sigma}_{\text{LO}}$ und $\hat{\sigma}_{\text{NLO}}$ leicht durch Reskalierung bestimmt werden. Ab der nächstführenden Ordnung tritt ebenfalls eine explizite Abhängigkeit von der Renormierungsskala auf. Diese explizite Abhängigkeit $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1(\mu_R)$ folgt aus der β -Funktion

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_s) &= \mu_R^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu_R^2} = -\alpha_s^2 \beta_0 - \alpha_s^3 \beta_1 + O(\alpha_s^4) \text{ und} \\ \beta_0 &= \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right) \end{aligned}$$

der QCD. Durch Anwenden der Definition der β -Funktion folgt

$$\mu_R^2 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \mu_R^2} = \beta(\alpha_s) \hat{\sigma}_0 + 2\alpha_s \beta(\alpha_s) \hat{\sigma}_1(\mu_R) + \alpha_s^2 \frac{\partial \hat{\sigma}_1(\mu_R)}{\partial \ln(\mu_R^2)}$$

für den Wirkungsquerschnitt. Damit die Abhängigkeit von der Renormierungsskala in der Ordnung α_s^2 verschwindet, muss

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_1(\mu_R)}{\partial \ln(\mu_R^2)} = \beta_0 \hat{\sigma}_0$$

gelten. Durch Integration folgt mit

$$\hat{\sigma}_1(\mu_R) = \beta_0 \hat{\sigma}_0 \ln \left(\frac{\mu_R^2}{m_t^2} \right) + \hat{\sigma}_1(m_t)$$

die explizite Abhängigkeit von μ_R . Zur Variation der Renormierungsskala bei fester Faktorisierungsskala reicht daher die Neuberechnung des Wirkungsquerschnitts in führender Ordnung aus. Außerdem erlaubt diese Beziehung einen Test der Abhängigkeit von μ_R bereits für einzelne Phasenraumpunkte.

3.3 Reelle Korrekturen

Die Grundidee [71] zur numerischen Berechnung der reellen Korrekturen ist das Einführen eines analytisch integrierbaren Subtraktionstermes $d\sigma^A$ mit gleichen Phasenraumdivergenzen wie die reellen Korrekturen $d\sigma^R$. Dadurch kann $(d\sigma^R - d\sigma^A)$ numerisch über den Phasenraum der reellen Korrekturen integriert werden. Die Korrekturen in der nächstführenden Ordnung

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{NLO}} &= \int_{2 \rightarrow (m+1)} [d\sigma^R - d\sigma^A] + \int_{2 \rightarrow (m+1)} d\sigma^A + \int_{2 \rightarrow m} d\sigma^V \\ &= \int_{2 \rightarrow (m+1)} [d\sigma^R - d\sigma^A] + \int_{2 \rightarrow m} \left[d\sigma^V + \int_1 d\sigma^A \right]\end{aligned}$$

können dann numerisch in vier Dimensionen ausgewertet werden. Der Subtraktionsterm

$$d\sigma^A = \sum_{\text{Dipole}} d\hat{\sigma}^B \otimes V_{\text{Dipol}}$$

wird durch Summation über Dipole berechnet, die von $d\hat{\sigma}^B$ ausgewertet mit einer für den Dipol spezifischen reduzierten Kinematik und von Splitting-Funktionen V_{Dipol} abhängen. Für den integrierten Subtraktionsterm gibt es einen Beitrag \mathcal{I} aus Endzustandssingularitäten und einen Beitrag \mathcal{K} aus Anfangszustandssingularitäten. Diese Beiträge werden mit der $2 \rightarrow m$ Kinematik des Born-Wirkungsquerschnittes ausgewertet. Für den masselosen Fall werden alle auftretenden Splitting-Funktionen V_{Dipol} und die zugehörigen Beiträge \mathcal{I} und \mathcal{K} für den integrierten Subtraktionsterm in [72] angegeben. Die Verallgemeinerung auf den massiven Fall erfolgte durch [11].

3.3.1 Formalismus von Catani, Dittmaier, Seymour und Trócsányi

Es soll der hadronische Wirkungsquerschnitt σ_{NLO} für die Produktion einzelner Top-Quarks bestimmt werden. Dieser ist über

$$\sigma_{\text{NLO}}(P_1, P_2) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 f_1^a(x_1, \mu_F) \int_0^1 dx_2 f_2^b(x_2, \mu_F) \hat{\sigma}^{ab}(x_1 P_1, x_2 P_2; \mu_F^2)$$

mit den partonischen Wirkungsquerschnitten $\hat{\sigma}^{ab} = \hat{\sigma}_{\text{LO}}^{ab} + \hat{\sigma}_{\text{NLO}}^{ab}$ verknüpft. Es wird nun eine abkürzende Notation

$$\hat{\sigma}_{\text{LO}}^{ab} = \int d\Phi^{(n)} \frac{1}{2\hat{s}} |\mathcal{A}_{\text{Born}}^{ab}|^2 F_J^{(n)} =: \int d\Phi^{(n)} \frac{1}{2\hat{s}} \frac{d\sigma_{\text{LO}}^{ab}}{d\Phi^{(n)}} F_J^{(n)} =: \int_{2 \rightarrow n} d\hat{\sigma}_{\text{LO}}^{ab}$$

für die Phasenraumintegration eingeführt. Mit dieser Notation wird nun die Masterformel (6.5 [11]) zur Berechnung der nächstführenden Ordnung

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{\text{NLO}}^{ab}(p_a, p_b; \mu_F^2) &= \int_{2 \rightarrow (m+1)} \left[\left(d\hat{\sigma}_{ab}^{\text{R}}(p_a, p_b) \right)_{\epsilon=0} - \left(\sum_{\text{Dipole}} d\hat{\sigma}_{ab}^{\text{B}}(p_a, p_b) \otimes V_{\text{Dipol}} \right)_{\epsilon=0} \right] \\
&+ \int_{2 \rightarrow m} \left[d\hat{\sigma}_{ab}^{\text{V}}(p_a, p_b; \mu_R^2) + d\hat{\sigma}_{ab}^{\text{B}}(p_a, p_b) \otimes \mathcal{I}(\mu_R^2) \right]_{\epsilon=0} \\
&+ \sum_{a'} \int_{2 \rightarrow m} \int_0^1 dx \left[d\hat{\sigma}_{a'b}^{\text{B}}(xp_a, p_b) \otimes (\mathcal{P} + \mathcal{K})^{a,a'}(x, \mu_F^2) \right]_{\epsilon=0} \\
&+ \sum_{b'} \int_{2 \rightarrow m} \int_0^1 dx \left[d\hat{\sigma}_{ab'}^{\text{B}}(p_a, xp_b) \otimes (\mathcal{P} + \mathcal{K})^{b,b'}(x, \mu_F^2) \right]_{\epsilon=0} \\
&= \hat{\sigma}_{ab}^{\text{R}}(p_a, p_b) + \hat{\sigma}_{ab}^{\text{VI}}(p_a, p_b) + \hat{\sigma}_{ab}^{\text{PK}}(p_a, p_b, \mu_F^2)
\end{aligned}$$

angegeben. Das Symbol \otimes steht für die Berücksichtigung von Farbkorrelationen und im Fall von V_{Dipol} ebenfalls von Spinkorrelationen (Unterabschnitt 3.3.2). Die Berechnung von $d\hat{\sigma}^{\text{R}}$ und vom Subtraktionsterm wird im Unterabschnitt 3.3.3 dargestellt. Der Beitrag $\hat{\sigma}^{\text{I}}$ zum integrierten Subtraktionsterm wird im Unterabschnitt 3.3.4 beschrieben. Die Beiträge in der dritten und vierten Zeile sind wegen kollinearen Anfangszustandssingularitäten bei einlaufenden Partonen erforderlich. Der zugehörige Beitrag $\hat{\sigma}^{\text{PK}}$ mit den Funktionen \mathcal{P} für die Faktorisierungsskalenabhängigkeit und \mathcal{K} sowie die Summe über a' und b' werden im Unterabschnitt 3.3.5 beschrieben.

3.3.2 Farb- und Spinkorrelationen

Die farbkorrelierten Matrixelemente sind für eine Amplitude mit m beteiligten Partonen durch

$$|\mathcal{M}_m^{j,k}|^2 \equiv [\mathcal{M}_m^{a_1 \dots b_j \dots b_k \dots a_m}(\{p_i; p_a\})]^* \tilde{T}_{b_j a_j}^n \tilde{T}_{b_k a_k}^n \mathcal{M}_m^{a_1 \dots a_j \dots a_k \dots a_m}(\{p_i; p_a\})$$

definiert. Die Indices k und j mit $k \neq j$ stehen für am Prozess beteiligte Partonen. Für \tilde{T} muss abhängig vom beschriebenen Parton eingesetzt werden: $\tilde{T}_{\alpha\beta}^a := T_{\alpha\beta}^a$ für ein Quark im Endzustand oder ein Antiquark im Anfangszustand, $\tilde{T}_{\alpha\beta}^a := -T_{\beta\alpha}^a$ für ein Antiquark im Endzustand oder ein Quark im Anfangszustand und $\tilde{T}_{cb}^a := if_{cab}$ für ein Gluon.

Farbkorrelationen bei der Produktion einzelner Top-Quarks

Die Amplitude des Prozesses $u + b \rightarrow d + t + g$

$$\mathcal{A}_{\text{Born}} = T_{du}^g \delta_{bt} \mathcal{A}_{\text{Born}}^l + T_{tb}^g \delta_{ud} \mathcal{A}_{\text{Born}}^s$$

besteht aus zwei Farbstrukturen. Als Beispiel wird $|\mathcal{A}^{ub}|^2$ durch die Wahl $j = u$ und $k = b$ berechnet. Es folgt eine Farbmatrix C^{ub} mit dem Eintrag

$$C_{11}^{ub} = [\delta_{bt} T_{du}^g]^* \tilde{T}_{\underline{u}\underline{u}}^n \tilde{T}_{\underline{b}\underline{b}}^n [\delta_{bt} T_{du}^g]$$

für $\mathcal{A}_{\text{Born}}^l$. Da beide Quarks einlaufend sind, wird jeweils $\tilde{T}_{\alpha\beta}^a := -T_{\beta\alpha}^a$ in

$$C_{11}^{ub} = [\delta_{bt} T_{du}^g]^* (-) T_{\underline{u}\underline{u}}^n (-) T_{\underline{b}\underline{b}}^n [\delta_{bt} T_{du}^g]$$

eingesetzt. Wegen $\delta_{\underline{b}\underline{b}} T_{\underline{b}\underline{b}}^n = \text{Sp}(T^n) = 0$ verschwindet dieses Element der Farbmatrix C^{ub} . Für die nicht-diagonalen Einträge gilt

$$C_{12}^{ub} = \delta_{\underline{b}\underline{t}} T_{\underline{u}\underline{d}}^g T_{\underline{u}\underline{u}}^n T_{\underline{b}\underline{b}}^n \delta_{\underline{u}\underline{d}} T_{\underline{t}\underline{b}}^g = \text{Sp}(T^n T^g) \text{Sp}(T^n T^g) = T_f C_F N_C.$$

Insgesamt folgt für die Farbmatrix

$$C^{ub} = C^{td} = T_f C_F N_C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Farbmatrix C^{ub} des farbkorrelierten Matrixelementes ist folglich nicht diagonal. Daher wird der im Abschnitt 2.3 berechnete Mischterm benötigt. Die verbleibenden farbkorrelierten Matrixelemente (siehe A.2)

$$\begin{aligned} C^{ut} &= C^{bd} = -T_f C_F N_C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ C^{ud} &= C_F N_C \begin{pmatrix} -T_f & 0 \\ 0 & C_F N_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}, \\ C^{bt} &= C_F N_C \begin{pmatrix} C_F N_C & 0 \\ 0 & -T_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ C^{ug} &= C^{dg} = \begin{pmatrix} -6N_C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und} \\ C^{bg} &= C^{tg} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6N_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgen analog. Für den Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung wurde bereits $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^l|^2$, $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2$ und $2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s]$ numerisch implementiert. Die Berechnung der farbkorrelierten Matrixelemente erfolgt jeweils durch Anpassung der Farbmatrix.

Spinkorrelationen

Ohne Spinkorrelationen kann das gemittelte Betragsquadrat einer Streuamplitude mit einem externen Gluon in der Form

$$\sum |\mathcal{A}|^2 = \sum \mathcal{A}^\mu \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \mathcal{A}^{*\nu} = \sum \mathcal{A}^\mu [-g_{\mu\nu}] \mathcal{A}^{*\nu}$$

geschrieben werden. Im Fall von Spinkorrelationen muss die eckige Klammer durch den Dipol Operator

$$< \mu | V | \nu > = \alpha g_{\mu\nu} + \beta n_\mu n_\nu$$

ersetzt werden. Hierbei sind μ und ν die Indices des Polarisationsvektors des beteiligten Gluons und n ein im Allgemeinen massiver Vierervektor. Die Größen α, β und n werden für alle benötigten Dipole in [11] angegeben. Die Betragsquadrate

$$\sum |\mathcal{A}_{\text{SK}}|^2 = \sum \mathcal{A}^\mu [\alpha g_{\mu\nu} + \beta n_\mu n_\nu] \mathcal{A}^{*\nu}$$

der Amplituden mit Spinkorrelation sind hingegen spezifisch für den Prozess und müssen berechnet werden. Der erste Summand ist proportional zum bekannten $|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2$. Durch den zweiten Summanden, $\beta n_\mu n_\nu$, erhält $|\mathcal{A}_{\text{SK}}|^2$ neben den 5 Mandelstamvariablen eine Abhängigkeit von 4 weiteren Produkten, z. B. von (np_1) , (np_2) , (nq_1) und (nn) nach Elimination von q_2 . Für das Viererprodukt mit dem Gluonimpuls gilt $(nq_3) = 0$. Bei Beteiligung von Gluonen treten die Farbmatriizen

$$C^{ug} = C^{dg} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C^{bg} = C^{tg} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

auf. Die nicht-diagonalen Einträge verschwinden folglich. Der Mischterm tritt daher bei Spinkorrelationen nicht auf, so dass nur die leichte und die schwere Linie berechnet werden muss. Das Ergebnis wurde analog zum Abschnitt 2.3 berechnet, es wird ebenfalls in der Form $|\mathcal{A}_{\text{SK}}^l|^2 = |V_m|^2 \frac{X_l}{N_l}$ angegeben. Für die leichte Linie gilt mit $s_1 = 2(p_1 p_2)$, $s_2 = 2(p_1 q_1)$, $s_3 = 2(p_1 q_3)$, $s_5 = 2(p_2 q_3)$ und $s_6 = 2(q_1 q_3)$, es wurde s_4 eliminiert,

$$\begin{aligned} X_l &= 16 \left[m_t^2 X_l^{(2)} + X_l^{(0)} \right], \\ X_l^{(2)} &= \left[4(nq_1)^2 s_1 s_3^2 \right] \\ &+ s_6 \left[4(np_1)(nq_1) s_3 s_5 - 8(np_1)(nq_1) s_1 s_3 - 4(np_2)(nq_1) s_3^2 + (nn) s_3^2 s_5 + (nn) s_3^3 \right] \\ &+ s_6^2 \left[4(np_1)(np_2) s_3 - 4(np_1)^2 s_5 + 4(np_1)^2 s_1 - (nn) s_3 s_5 \right] \text{ und} \\ X_l^{(0)} &= s_3^3 s_6 \left[2(nn) s_5 + (nn) s_2 - (nn) s_6 + (nn) s_3 \right] \\ &+ s_3^2 s_6 \left[8(np_2)(nq_1) s_1 + (nn) s_5^2 + 2(nn) s_2 s_5 - 4(np_2)^2 s_6 - 2(nn) s_5 s_6 \right] \\ &+ s_6^2 \left[-4(np_1)^2 s_5^2 + 8(np_1)^2 s_1 s_5 - 4(np_1)^2 s_1^2 \right] \\ &+ s_6^2 s_3 \left[8(np_1)(np_2) s_5 - 8(np_1)(np_2) s_1 - (nn) s_5^2 \right] \\ &+ s_3 \left[8(np_1)(nq_1) s_1^2 s_6 - 8(np_1)(nq_1) s_1 s_5 s_6 + (nn) s_2 s_5^2 s_6 - 4(nq_1)^2 s_1^2 s_3 \right]. \end{aligned}$$

Für den Nenner gilt

$$N_l = \frac{1}{16} s_3^2 s_6^2 \left[s_6 - s_3 - s_2 - m_w^2 \right].$$

Das Ergebnis für die schwere Linie ist mit $s_2 = 2(p_2 q_2)$, $s_3 = 2(p_2 q_3)$, $s_4 = 2(q_1 q_2)$, $s_5 = 2(q_1 q_3)$ und $s_6 = 2(q_2 q_3)$, es wurde s_1 eliminiert,

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{16} \left[s_6 - s_3 - s_2 - m_w^2 + m_t^2 \right]^2 s_3^2 s_6^2 \\ X_s &= 16 \left[m_t^2 X_s^{(2)} + X_s^{(0)} \right], \\ X_s^{(2)} &= - \left[4(nq_2)^2 s_3^2 s_5 + 4(nq_2)^2 s_3^2 s_4 \right] \\ &+ s_6 \left[4(np_2)(nq_2) s_3 s_5 + 8(np_2)(nq_2) s_3 s_4 - (nn) s_3^2 s_5 + 4(nq_2)(nq_1) s_3^2 \right] \\ &- s_6^2 \left[4(np_2)(nq_1) s_3 + 4(np_2)^2 s_4 + (nn) s_3 s_5 + (nn) s_3 s_6 \right] \text{ und} \\ X_s^{(0)} &= s_6^3 (nn) \left[s_3^2 + s_2 s_3 - 2 s_3 s_5 - s_3 s_6 \right] \\ &+ s_3^2 s_6 \left[(nn) s_5^2 + 8(nq_2)(nq_1) s_5 + 8(nq_2)(nq_1) s_4 + 2(nn) s_5 s_6 - 4(nq_1)^2 s_6 \right] \\ &+ 4 s_3 (nq_2) \left[2(np_2) s_4 s_5 s_6 + 2(np_2) s_4^2 s_6 - (nq_2) s_3 s_5^2 - 4(nq_2) s_3 s_4 s_5 - (nq_2) s_3 s_4^2 \right] \\ &+ s_6 \left[(nn) s_2 s_3 s_5^2 - 4(np_2)^2 s_4^2 s_6 - 8(np_2) nq_1 s_3 s_4 s_6 - (nn) s_3 s_5^2 s_6 + 2(nn) s_2 s_3 s_5 s_6 \right]. \end{aligned}$$

Die angegebenen Ergebnisse für die Matrixelemente mit Spinkorrelation wurden analog zum Abschnitt 2.3 numerisch in einer Bibliothek implementiert, welche bei der Berechnung des Subtraktionsterms aufgerufen wird.

Prozess	Vorfaktor	Prozess	Vorfaktor	Prozess	Vorfaktor
$\bar{d}\bar{u} \rightarrow t\bar{u}\bar{u}\bar{b}$	$f_1^{\bar{d}}f_2^{\bar{u}} + f_1^{\bar{s}}f_2^{\bar{c}}$	$\bar{d}\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}\bar{d}$	$f_1^{\bar{d}}f_2^{\bar{d}} + f_1^{\bar{s}}f_2^{\bar{s}}$	$\bar{d}\bar{b} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}\bar{b}$	$f_2^{\bar{b}}(f_1^{\bar{d}} + f_1^{\bar{s}})$
$u\bar{u} \rightarrow t\bar{d}\bar{b}\bar{u}$	$f_1^u f_2^{\bar{u}} + f_1^c f_2^{\bar{c}}$	$u\bar{d} \rightarrow t\bar{d}\bar{d}\bar{b}$	$f_1^u f_2^{\bar{d}} + f_1^c f_2^{\bar{s}}$	$u\bar{b} \rightarrow t\bar{d}\bar{b}\bar{b}$	$f_2^{\bar{b}}(f_1^u + f_1^c)$
$b\bar{u} \rightarrow t\bar{d}\bar{u}\bar{u}$	$f_1^b(f_2^{\bar{u}} + f_2^{\bar{c}})$	$b\bar{d} \rightarrow t\bar{d}\bar{d}\bar{u}$	$f_1^b(f_2^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}})$	$b\bar{b} \rightarrow t\bar{d}\bar{u}\bar{b}$	$2f_1^b f_2^{\bar{b}}$
$uu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}u$	$f_1^u f_2^u + f_1^c f_2^c$	$d\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}d$	$f_1^d f_2^{\bar{d}} + f_1^s f_2^{\bar{s}}$	$bb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}b$	$2f_1^b f_2^{\bar{b}}$

Tabelle 3.3: Vorfaktoren von $ub \rightarrow tdq\bar{q}$ mit $q \in \{u, d, b\}$

Prozess	Vorfaktor	Prozess	Vorfaktor
$\bar{d}\bar{c} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}\bar{c}$	$f_2^{\bar{d}}(f_1^{\bar{c}} + f_1^{\bar{s}}) + f_2^{\bar{s}}(f_1^{\bar{u}} + f_1^{\bar{d}})$	$u\bar{d} \rightarrow tc\bar{c}\bar{b}$	$2f_1^u f_2^{\bar{d}} + 2f_1^c f_2^{\bar{s}}$
$c\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}c$	$f_2^{\bar{d}}(f_1^c + f_1^s) + f_2^{\bar{s}}(f_1^u + f_1^d)$	$b\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{c}\bar{c}$	$2f_1^b(f_2^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}})$
$u\bar{c} \rightarrow t\bar{d}\bar{c}\bar{b}$	$f_1^u(f_2^{\bar{c}} + f_2^{\bar{s}}) + f_1^c(f_2^{\bar{u}} + f_2^{\bar{d}})$	$c\bar{c} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}d$	$f_1^c f_2^{\bar{c}} + f_1^s f_2^{\bar{s}} + f_1^u f_2^{\bar{u}} + f_1^d f_2^{\bar{d}}$
$b\bar{c} \rightarrow t\bar{d}\bar{u}\bar{c}$	$f_1^b(f_2^{\bar{c}} + f_2^{\bar{s}} + f_2^{\bar{u}} + f_2^{\bar{d}})$	$cu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}c$	$f_2^u(f_1^c + f_1^s) + f_2^c(f_1^u + f_1^d)$
$bu \rightarrow t\bar{d}c\bar{c}$	$2f_1^b(f_2^u + f_2^c)$	$bc \rightarrow t\bar{d}\bar{u}c$	$2f_1^b(f_2^u + f_2^c + f_2^s + f_2^d)$

Tabelle 3.4: Vorfaktoren von $ub \rightarrow tdc\bar{c}$

3.3.3 Reelle Prozesse und der Subtraktionsterm

In diesem Unterabschnitt wird die Berechnung von $\hat{\sigma}^R = \sum_{a,b} \hat{\sigma}_{ab}^R$ mit

$$\hat{\sigma}_{ab}^R = \int_{2 \rightarrow (m+1)} \left[\left(d\hat{\sigma}_{ab}^R(p_a, p_b) \right)_{\epsilon=0} - \left(\sum_{\text{Dipole}} d\hat{\sigma}_{ab}^B(p_a, p_b) \otimes V_{\text{Dipol}} \right)_{\epsilon=0} \right]$$

beschrieben. Die Indices a und b stehen für die einlaufenden Partonen, wobei mehrere Prozesse gleiche einlaufende Partonen haben können. Insgesamt sind 184 Prozesse und die zugehörigen Subtraktionsterme zu bestimmen.

Reelle Prozesse

Zunächst wird die Berechnung der Summe von allen 184 reellen Prozessen beschrieben. Die Grundidee ist dabei, für jeden Phasenraumpunkt aus 72 Prozessen durch Vorfaktoren aus Partonverteilungsfunktionen die Summe aller 184 Betragsquadrate der Amplituden zu bestimmen. Aus dem Prozess $ub \rightarrow tdgg$ folgen durch Kreuzen 13 Prozesse. 12 dieser Prozesse haben den gleichen Anfangszustand wie die führende Ordnung. Die entsprechenden Vorfaktoren wurden in Tabelle 2.5 bereits angegeben. Der neue Anfangszustand, $gg \rightarrow t\bar{d}\bar{b}\bar{u}$, hat den Vorfaktor $2f_1^g f_2^g$. Durch den Faktor 2 wird der Prozess $gg \rightarrow ts\bar{b}\bar{c}$ mit identischem Betragsquadrat der Amplitude berücksichtigt. Für $ub \rightarrow tdq\bar{q}$ mit $q \in \{u, d, b\}$ gibt es jeweils 7 neue mögliche Anfangszustände, deren Vorfaktoren in Tabelle 3.3 angegeben sind. Die beiden Fälle $q \in \{c, s\}$ können durch einen gemeinsamen Vorfaktor behandelt werden. Die 20 zugehörigen Vorfaktoren sind in Tabelle 3.4 angegeben. Die Betragsquadrate der Amplituden wurden in einem ersten Schritt durch das Programm MadGraph5_aMC@NLO [73] erzeugt. Dabei wurden automatisiert alle Prozesse

Prozess	tW	Prozess	tW	Prozess	tW	$t\bar{t}$
$gb \rightarrow td\bar{u}g$	12	$bb \rightarrow td\bar{u}b$	4	$gg \rightarrow td\bar{u}\bar{b}$	5	3
$db \rightarrow tdd\bar{u}$	4	$\bar{d}b \rightarrow td\bar{u}\bar{d}$	2	$b\bar{b} \rightarrow td\bar{u}\bar{b}$	3	1
$ub \rightarrow tud\bar{u}$	2	$cb \rightarrow tcd\bar{u}$	2	$d\bar{d} \rightarrow td\bar{u}\bar{b}$	1	1
$\bar{u}b \rightarrow td\bar{u}\bar{u}$	4	$\bar{c}b \rightarrow td\bar{c}\bar{u}$	2	$u\bar{u} \rightarrow td\bar{u}\bar{b}$	1	1
				$c\bar{c} \rightarrow td\bar{u}\bar{b}$	1	1

Tabelle 3.5: Prozesse mit resonanten Diagrammen

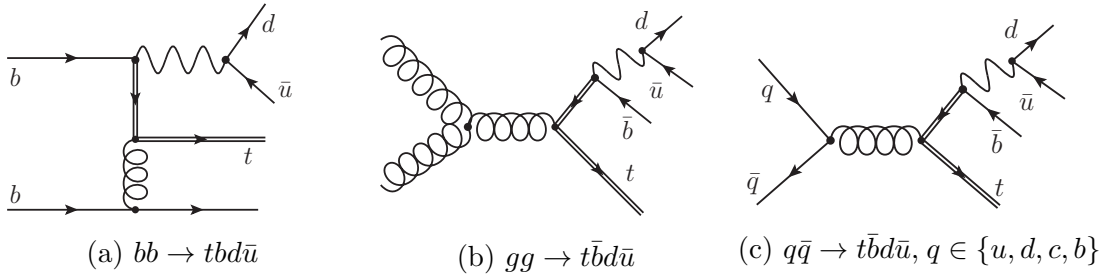


Abbildung 3.6: Beispiele für resonante Diagramme der reellen Prozesse

für $p_1 + p_2 \rightarrow t + p_3 + p_4 + p_5$ mit $p_i \in \{g, u, \bar{u}, d, \bar{d}, c, \bar{c}, s, \bar{s}, b, \bar{b}\}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bestimmt und als Quelltext in **C++** ausgegeben, welcher die Berechnung der Betragsquadrate der Amplituden ermöglicht. Dabei wird auf die Bibliothek **HELAS** [74] zurückgegriffen, mit der einzelne Komponenten von Helizitätsamplituden berechnet werden können.

Resonante Diagramme

In einem zweiten Schritt wurden resonante Diagramme manuell entfernt. Dies ist für alle Prozesse mit einem Down-Quark und einem Up-Antiquark im Endzustand erforderlich. Nach der Phasenraumintegration trägt der dominante Beitrag aus diesen Diagrammen nicht zur Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit Jets bei. Im Anhang A.3 ist beispielhaft der entsprechende Quelltext für den Prozess $c\bar{c} \rightarrow td\bar{u}\bar{b}$ angegeben. Durch das Entfernen der resonanten Diagramme aus der Amplitude werden ebenfalls Beiträge aus der Interferenz von resonanten und nicht resonanten Diagrammen entfernt, die nicht durch die Farbalgebra verschwinden. Im Prozess $gb \rightarrow td\bar{u}g$ entsprechen 12 von 24 Diagrammen der assoziierten Produktion eines Top-Quarks mit einem W -Boson mit anschließendem Zerfall. Allgemein gehören bei allen Prozessen mit neuen Anfangszuständen und $d\bar{u}$ im Endzustand einzelne Diagramme zur assoziierten Produktion eines Top-Quarks mit einem W -Boson (Abb. 3.6a). Bei zwei Gluonen im Anfangszustand sind in acht Diagrammen resonante W -Bosonen möglich. In drei dieser acht Diagramme kann zusätzlich ein virtuelles Top-Quark resonant werden. Diese Diagramme beschreiben die Produktion eines Top-Quarks und eines Top-Antiquarks mit anschließendem Zerfall (Abb. 3.6b). Dies ist auch bei Prozessen mit einem Paar aus Quark und Antiquark des gleichen Flavours im Anfangszustand der Fall (Abb. 3.6c). Tabelle 3.5 zeigt die Anzahl resonanter Diagramme in einer Übersicht. Die entsprechenden Diagramme sind in der angegebenen Produktion von Top-Quarks zu berücksichtigen ($t\bar{t}$ oder tW).

Subtraktionsterm

Der Subtraktionsterm

$$S_{ab} = \sum_{\text{Dipole}} d\hat{\sigma}_{ab}^B(p_a, p_b) \otimes V_{\text{Dipol}} = S_{ab}^{\text{FF}} + S_{ab}^{\text{FI}} + S_{ab}^{\text{II}} + S_{ab}^{\text{IF}} \quad (3.3)$$

besteht aus einem Anteil $(S_{ab}^{\text{IF}} + S_{ab}^{\text{II}})$ für Anfangszustandssingularitäten und einem Anteil $(S_{ab}^{\text{FF}} + S_{ab}^{\text{FI}})$ für Endzustandssingularitäten. Es wird zunächst

$$S_{ab}^{\text{FF}} = \sum_{i < j} \sum_{k \neq i, j} D_{ij,k}(p_a, p_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(p_a, p_b, p_1, \dots, \tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_k, \dots, p_{m+1})$$

betrachtet. Während der Dipol von zwei einlaufenden und $(m+1)$ auslaufenden Impulsen abhängt, hängt die Jet-Funktion nur von m auslaufenden Impulsen ab. In den zugehörigen reduzierten Phasenraumpunkt geht statt den Impulsen p_i und p_j ein rekombinierter Impuls \tilde{p}_{ij} ein. Die Impulse p_i und p_j gehören dabei zum abstrahlenden und zum abgestrahlten Teilchen. Weiterhin geht an Stelle des Impulses p_k für das Beobachter („Spectator“ in [11]) genannte Teilchen ein Impuls \tilde{p}_k ein. Das Tripel (i, j, k) charakterisiert jeden einzelnen Dipol. Für den zweiten Beitrag zu Endzustandssingularitäten gilt

$$\begin{aligned} S_{ab}^{\text{FI}} &= \sum_{i < j} \left[D_{ij}^a(p_a, p_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(\tilde{p}_a, p_b, p_1, \dots, \tilde{p}_{ij}, \dots, p_{m+1}) \right] \\ &+ \sum_{i < j} \left[D_{ij}^b(p_a, p_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(p_a, \tilde{p}_b, p_1, \dots, \tilde{p}_{ij}, \dots, p_{m+1}) \right]. \end{aligned}$$

Für Anfangszustandssingularitäten gilt

$$\begin{aligned} S_{ab}^{\text{II}} &= \sum_i \left[D^{ai,b}(\tilde{p}_a, p_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(\tilde{p}_{ai}, p_b, \tilde{p}_1, \dots, p_{m+1}) \right] \\ &+ \sum_i \left[D^{bi,a}(p_a, \tilde{p}_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(p_a, \tilde{p}_{bi}, \tilde{p}_1, \dots, p_{m+1}) \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_{ab}^{\text{IF}} &= \sum_i \sum_{k \neq i} \left[D_k^{ai}(p_a, p_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(\tilde{p}_{ai}, p_b, p_1, \dots, \tilde{p}_k, \dots, p_{m+1}) \right] \\ &+ \sum_i \sum_{k \neq i} \left[D_k^{bi}(p_a, p_b, p_1, \dots, p_{m+1}) F_J^{(m)}(p_a, \tilde{p}_{bi}, p_1, \dots, \tilde{p}_k, \dots, p_{m+1}) \right]. \end{aligned}$$

Anwendung auf die Erzeugung einzelner Top-Quarks

Bei Anfangszustandssingularitäten kann das Top-Quark nur als Beobachter auftreten. Im Allgemeinen gibt es daher für $p_1 + p_2 \rightarrow t + p_4 + p_5 + p_6$ 24 generische Dipole für Anfangszustandssingularitäten in

$$\begin{aligned} S_{ab}^{\text{II}} &= D^{14,2} + D^{15,2} + D^{16,2} + D^{24,1} + D^{25,1} + D^{26,1} \text{ und} \\ S_{ab}^{\text{IF}} &= D_{\{t56\}}^{14} + D_{\{t46\}}^{15} + D_{\{t45\}}^{16} + D_{\{t56\}}^{24} + D_{\{t46\}}^{25} + D_{\{t45\}}^{26} \end{aligned}$$

i	j	Aufspaltung
Gluon	Gluon	V_{gg}
Gluon	(Anti)Quark	V_{gq}
(Anti)Quark	Gluon	V_{qg}
(Anti)Quark q_i	I: q_i F: \bar{q}_i	V_{qq}

Tabelle 3.6: Übersicht möglicher Abstrahlungen in der QCD

und 24 generische Dipole für Endzustandssingularitäten in

$$\begin{aligned}
S_{ab}^{\text{FI}} &= D_{t4}^{\{12\}} + D_{t5}^{\{12\}} + D_{t6}^{\{12\}} + D_{45}^{\{12\}} + D_{46}^{\{12\}} + D_{56}^{\{12\}} \text{ und} \\
S_{ab}^{\text{FF}} &= D_{t4,\{56\}} + D_{t5,\{46\}} + D_{t6,\{45\}} + D_{45,\{t6\}} + D_{46,\{t5\}} + D_{56,\{t4\}},
\end{aligned}$$

verschiedene Beobachter wurden in geschweiften Klammern angegeben. Für einen bestimmten Prozess gibt es für jeden dieser generischen Dipole genau 5 Möglichkeiten. Entweder es liegt einer der vier Typen von Abstrahlung („Splitting“) aus Tabelle 3.6 vor oder die zugehörige Abstrahlung existiert nicht, z. B. $V_{uc} = 0$. Als Beispiel wird der Prozess $ub \rightarrow tdg_1g_2$ betrachtet. Es gibt 16 nicht verschwindende Dipole für Anfangszustandssingularitäten,

$$\begin{aligned}
S_{ub}^{\text{II}} &= D^{ug_1,b} + D^{ug_2,b} + D^{bg_1,u} + D^{bg_2,u} \text{ und} \\
S_{ub}^{\text{IF}} &= D_{\{tdg_2\}}^{ug_1} + D_{\{tdg_1\}}^{ug_2} + D_{\{tdg_2\}}^{bg_1} + D_{\{tdg_1\}}^{bg_2},
\end{aligned}$$

da die Aufspaltung Up-Quark in Down-Quark und Bottom-Quark in Down-Quark nicht möglich sind. Für Endzustandssingularitäten gibt es 20 nicht verschwindende Dipole,

$$\begin{aligned}
S_{ub}^{\text{FI}} &= D_{tg_1}^{\{ub\}} + D_{tg_2}^{\{ub\}} + D_{dg_1}^{\{ub\}} + D_{dg_2}^{\{ub\}} + D_{g_1g_2}^{\{ub\}} \text{ und} \\
S_{ub}^{\text{FF}} &= D_{tg_1,\{dg_2\}} + D_{tg_2,\{dg_1\}} + D_{dg_1,\{tg_2\}} + D_{dg_2,\{tg_1\}} + D_{g_1g_2,\{td\}},
\end{aligned}$$

da die Aufspaltung Top-Quark in Down-Quark nicht möglich ist.

Dipole für zwei Partonen im Endzustand

Von den vier Summanden in Gl. (3.3) werden exemplarisch die Dipole (5.2 [11])

$$D_{ij,k}(p_1, \dots, p_{m+1}) = -\frac{1}{(p_i + p_j)^2 - m_{ij}^2} m_{ij} < \dots \tilde{i}j, \tilde{k} \dots | \frac{\mathbf{T}_k \mathbf{T}_{ij}}{\mathbf{T}_{ij}^2} \mathbf{V}_{ij,k} | \dots \tilde{i}j, \tilde{k} \dots >_m$$

für S_{ab}^{FF} angegeben. Die farbkorrelierten Matrixelemente wurden im Unterabschnitt 3.3.2 eingeführt. Für die Splitting-Funktionen (5.16, 5.17 und 5.19 [11])

$$\mathbf{V}_{gQ,k} = VC_F \left\{ \frac{2}{1 - \tilde{z}_j(1 - y_{ij,k})} - \frac{\tilde{v}_{ij,k}}{v_{ij,k}} \left[1 + \tilde{z}_j + \frac{m_Q^2}{(p_i p_j)} + \epsilon(1 - \tilde{z}_j) \right] \right\}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mu | \mathbf{V}_{Q\bar{Q},k} | \nu \rangle &= V \frac{T_f}{v_{ij,k}} \left\{ -g^{\mu\nu} \left[1 - \frac{2\kappa}{1-\epsilon} \left(z_+ z_- - \frac{m_Q^2}{(p_i + p_j)^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{(p_i + p_j)^2} \left[\tilde{z}_i^{(m)} p_i^\mu - \tilde{z}_j^{(m)} p_j^\mu \right] \left[\tilde{z}_i^{(m)} p_i^\nu - \tilde{z}_j^{(m)} p_j^\nu \right] \right\} \text{ und} \\
\langle \mu | \mathbf{V}_{gg,k} | \nu \rangle &= 2V C_A \left\{ -g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{1 - \tilde{z}_i(1 - y_{ij,k})} + \frac{1}{1 - \tilde{z}_j(1 - y_{ij,k})} - \frac{2 - \kappa z_+ z_-}{v_{ij,k}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{v_{ij,k}} \frac{1 - \epsilon}{(p_i p_j)} \left[\tilde{z}_i^{(m)} p_i^\mu - \tilde{z}_j^{(m)} p_j^\mu \right] \left[\tilde{z}_i^{(m)} p_i^\nu - \tilde{z}_j^{(m)} p_j^\nu \right] \right\}
\end{aligned}$$

gibt es wegen $\mathbf{V}_{gg,k} = \mathbf{V}_{gq,k}$ drei Fälle mit $V = 8\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}$ als gemeinsamen Vorfaktor. Die reduzierte Kinematik ist durch (5.9 [11])

$$\tilde{p}_k^\mu = \frac{\sqrt{\lambda(Q^2, m_{ij}^2, m_k^2)}}{\sqrt{\lambda(Q^2, (p_i + p_j)^2, m_k^2)}} \left(p_k^\mu - \frac{(Q p_k)}{Q^2} Q^\mu \right) + \frac{Q^2 + m_k^2 - m_{ij}^2}{2Q^2} Q^\mu$$

und $\tilde{p}_{ij}^\mu = Q^\mu - \tilde{p}_k^\mu$ mit $Q = p_i + p_j + p_k$ gegeben. Weiterhin wurde die Funktion

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

verwendet. In den Splitting-Funktionen treten die Variablen (5.12, 5.13 und 5.14 [11])

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_i &= 1 - \tilde{z}_j = \frac{p_i p_k}{p_i p_k + p_j p_k}, \tilde{z}_i^{(m)} = \tilde{z}_i - \frac{1}{2}(1 - v_{ij,k}), \tilde{z}_j^{(m)} = \tilde{z}_j - \frac{1}{2}(1 - v_{ij,k}), \\
v_{ij,k} &= \frac{\sqrt{[2\mu_k^2 + (1 - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_k^2)(1 - y_{ij,k})]^2 - 4\mu_k^2}}{(1 - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_k^2)(1 - y_{ij,k})}, \tilde{v}_{ij,k} = \frac{\lambda(1, \mu_{ij}^2, \mu_k^2)}{1 - \mu_{ij}^2 - \mu_k^2}, \\
z_\pm &= \frac{2\mu_i^2 + (1 - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_k^2)y_{ij,k}}{2[\mu_i^2 + \mu_j^2 + (1 - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_k^2)y_{ij,k}]} (1 \pm v_{ij,k} v_{ij,k})
\end{aligned}$$

auf. Dabei ist $\mu_n = \frac{m_n}{\sqrt{Q^2}}$. Weiterhin gilt

$$y_{ij,k} = \frac{(p_i p_j)}{(p_i p_j) + (p_i p_k) + (p_j p_k)} \text{ und } v_{ij,i} = \frac{\sqrt{(1 - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_k^2)^2 y_{ij,k}^2 - 4\mu_i^2 \mu_j^2}}{(1 - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_k^2)y_{ij,k} + 2\mu_i^2}.$$

Im masselosen Grenzfall vereinfachen sich die Formeln durch

$$\tilde{p}_k^\mu = \frac{1}{1 - y_{ij,k}} p_k^\mu, \tilde{v}_{ij,k} = v_{ij,k} = 1 \text{ und } z_+ z_- = 0.$$

Anwendung auf die Produktion von Jets bei Elektron-Positron-Annihilationen

Dieses Beispiel wird im Anhang D von [72] gezeigt. Hier werden mehr Zwischenschritte angegeben. Für $e^+(q_1)e^-(q_2) \rightarrow u(p_1)\bar{u}(p_2)g(p_3)$ tragen zwei Dipole zum Subtraktionsterm $S = D_{13,2} + D_{23,1}$ bei, da sowohl das Up-Quark als auch das Up-Antiquark als Beobachter auftreten können. Die Farbalgebra aus der Farbkorrelation führt zu einem Faktor $(-C_F)$, so dass

$$\begin{aligned}
D_{13,2} &= \frac{1}{2(p_1 p_3)} \mathbf{V}_{13,2} |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2(q_1, q_2, \tilde{p}_{13}, \tilde{p}_2) \text{ und} \\
D_{23,1} &= \frac{1}{2(p_2 p_3)} \mathbf{V}_{23,1} |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2(q_1, q_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_{23})
\end{aligned}$$

für die Dipole folgt. Nach Anwendung von Gl. (3.4) für den Fall mit zwei auslaufenden Partonen im masselosen Fall folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_{13,2}}{2(p_1 p_3)} &= \frac{VC_F}{y_{13,2} Q^2} \left[\frac{2}{1 - \tilde{z}_1(1 - y_{13,2})} - 1 - \tilde{z}_1 \right] \text{ und} \\ \frac{\mathbf{V}_{23,1}}{2(p_2 p_3)} &= \frac{VC_F}{y_{23,1} Q^2} \left[\frac{2}{1 - \tilde{z}_2(1 - y_{23,1})} - 1 - \tilde{z}_2 \right].\end{aligned}$$

Das Betragsquadrat für den reellen Prozess

$$|\mathcal{A}_3|^2 = \frac{8\pi\alpha_s C_F}{Q^2} |\mathcal{A}_2|^2 \Theta(x_1 + x_2 - 1) \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$$

kann durch $x_i = 2p_i(q_1 + q_2)/s$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ ausgedrückt werden. Es gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}y_{13,2} &= \frac{2(p_1 p_3)}{Q^2} = 1 - x_2 \text{ und} \\ \tilde{z}_1 &= \frac{(p_1 p_2)}{(p_1 p_2) + (p_2 p_3)} = \frac{p_1(Q - p_3)}{(p_2 Q)} = \frac{x_1 - (1 - x_2)}{x_2},\end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_{13,2}}{2(p_1 p_3)} &= \frac{1}{(1 - x_2) Q^2} VC_F \left[\frac{2}{1 - (x_1 + x_2 - 1)} - \frac{x_1 + 2x_2 - 1}{x_2} \right] \text{ und} \\ \frac{\mathbf{V}_{23,1}}{2(p_2 p_3)} &= \frac{1}{(1 - x_1) Q^2} VC_F \left[\frac{2}{1 - (x_2 + x_1 - 1)} - \frac{x_2 + 2x_1 - 1}{x_1} \right].\end{aligned}$$

Für die reellen Korrekturen abzüglich Subtraktionsterm folgt nun

$$\begin{aligned}\sigma^R &= \sigma_{\text{LO}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \Theta(x_1 + x_2 - 1) \left\{ \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \right. \\ &\quad - \left[\frac{1}{1 - x_2} \left(\frac{2}{2 - x_1 - x_2} - \frac{x_1 + 2x_2 - 1}{x_2} \right) \right] \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{1 - x_1} \left(\frac{2}{2 - x_1 - x_2} - \frac{x_2 + 2x_1 - 1}{x_1} \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Nach Vereinfachung der Brüche folgt

$$\begin{aligned}\sigma^R &= \sigma_{\text{LO}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2}{x_1 x_2} \\ &= \sigma_{\text{LO}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dx_1 \left[(1 - x_1) \ln(1 - x_1) - \frac{x_1}{2} \right].\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 1} [(1 - x) \ln(1 - x)] = 0$ kann das uneigentliche Integral ausgewertet werden. Nach der Integration über x_1 folgt

$$\sigma^R = \sigma_{\text{LO}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \left[-\frac{1}{4} \right] \quad (3.5)$$

als Ergebnis für die reellen Korrekturen abzüglich Subtraktionsterm. Für den Wirkungsquerschnitt in nächstführender Ordnung fehlt noch der Beitrag σ^I für den integrierten Subtraktionsterm, dieser wird im nächsten Unterabschnitt berechnet.

3.3.4 Integrierter Subtraktionsterm

Der integrierte Subtraktionsterm ist der zweite Summand in

$$\hat{\sigma}_{ab}^{\text{VI}}(p_a, p_b, \mu_R^2) = \int_{2 \rightarrow m} [\text{d}\hat{\sigma}^{\text{V}}(p_a, p_b, \mu_R^2) + \text{d}\hat{\sigma}^{\text{B}}(p_a, p_b) \otimes \mathcal{I}]_{\epsilon=0}$$

und hat die Form

$$\mathcal{I} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} V_I \sum_j \sum_{k \neq j} \mathbf{T}_j \mathbf{T}_k \hat{\mathcal{I}}^{jk}. \quad (3.6)$$

Die Summation in j läuft über alle beteiligten externen Partonen und beschreibt den Emitter. Der Index $k \neq j$ beschreibt das Beobachter genannte Parton und kann ebenfalls ein- oder auslaufend sein. Bei der Berechnung von $\text{d}\hat{\sigma}^{\text{B}} \otimes \mathcal{I}$ tritt das farbkorrelierte Matrixelement $|\mathcal{M}^{j,k}|^2$ auf.

Der Vorfaktor

$$V_I = \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} = \Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon \left(\frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)} \right) = \Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon \left(1 - \frac{\pi^2}{6}\epsilon^2 + O(\epsilon^4) \right)$$

muss bei der Berechnung von $\hat{\sigma}_{ab}^{\text{VI}}$ konsistent berücksichtigt werden. Da die integrierten Subtraktionsterme weniger rechenintensiv als die virtuellen Korrekturen sind, werden die Konventionen an dieser Stelle angepasst. Der Vorfaktor $\Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon$ wurde in den virtuellen Korrekturen ebenfalls ausgeklammert.

Bei der Erzeugung einzelner Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets gibt es zwei Partonen im Anfangszustand und drei Partonen im Endzustand. Dies führt zu 20 Summanden in Gl. (3.6). Die einzelnen Summanden hängen von j , k , dem entsprechenden farbkorrelierten Matrixelement und dem Emitter (Quark oder Gluon) ab. Bei zwei beteiligten

Typ	Paare (Emitter j , Beobachter k)
II	(1,2);(2,1)
IF	(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(2,4);(2,5)
FI	(3,1);(3,2);(4,1);(4,2);(5,1);(5,2)
FF	(3,4);(3,5);(4,3);(4,5);(5,3);(5,4)

Tabelle 3.7: Beiträge des I-Operators für $ub \rightarrow tdg$

Partonen a und b aus dem Anfangszustand (Fall II) gilt

$$\hat{\mathcal{I}}^{ab} = \frac{1}{C_a} \left[\left(\frac{\mu^2}{s_{ab}} \right)^\epsilon \left(\frac{C_a}{\epsilon^2} + \frac{\gamma_a}{\epsilon} \right) - C_a \frac{\pi^2}{3} + \gamma_a + K_a \right]$$

mit den Konstanten (5.91 und 6.17 [11])

$$\begin{aligned} \gamma_q &= \frac{3}{2} C_F, \\ K_q &= \left(\frac{7}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right) C_F, \\ \gamma_g &= \frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} T_f n_f, \\ K_g &= \left(\frac{67}{18} - \frac{\pi^2}{6} \right) C_A - \frac{10}{9} T_f n_f \end{aligned}$$

und der kinematischen Größe $s_{ab} = 2(p_a p_b)$. C_a steht für den entsprechenden Casimir Operator, das heißt im Fall von Quarks für $C_F = \frac{4}{3}$ und im Fall von Gluonen für $C_A = 3$. Für die Anzahl an beteiligten leichten Quark Flavour gilt in dieser Arbeit $n_f = 5$.

Bei einem Parton aus dem Anfangszustand (a) und einem Parton aus dem Endzustand (j) gilt (6.52 [11])

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{I}}^{ja} &= \left(\frac{\mu^2}{s_{ja}}\right)^\epsilon \left(\mathcal{V}_j(s_{ja}, m_j, 0; \epsilon, \kappa) - \frac{\pi^2}{3}\right) \\ &+ \frac{1}{C_j} \left[\Gamma_j(\mu, m_j; \epsilon) + \gamma_j \ln\left(\frac{\mu^2}{s_{ja}}\right) + \gamma_j + K_j\right], \\ \hat{\mathcal{I}}^{aj} &= \left(\frac{\mu^2}{s_{aj}}\right)^\epsilon \left(\mathcal{V}_a(s_{aj}, 0, m_j; \epsilon, \frac{2}{3}) - \frac{\pi^2}{3}\right) \\ &+ \frac{1}{C_a} \left[\frac{\gamma_a}{\epsilon} + \gamma_a \ln\left(\frac{\mu^2}{s_{aj}}\right) + \gamma_a + K_a\right]\end{aligned}$$

und bei Partonen (j, k) aus dem Endzustand (6.16 [11])

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{I}}^{jk}(\epsilon, \mu^2; \{p_i, m_i\}) &= \left(\frac{\mu^2}{s_{jk}}\right)^\epsilon \left(\mathcal{V}_j(s_{jk}, m_j, m_k; \epsilon, \kappa) - \frac{\pi^2}{3}\right) \\ &+ \frac{1}{C_j} \left[\Gamma_j(\mu, m_j; \epsilon) + \gamma_j \ln\left(\frac{\mu^2}{s_{jk}}\right) + \gamma_j + K_j + O(\epsilon)\right]. \quad (3.7)\end{aligned}$$

Im Folgenden werden die Funktionen Γ_j und \mathcal{V}_j für die in dieser Arbeit benötigten Fälle angegeben. Für Quarks gilt im masselosen Fall $\Gamma_q = \gamma_q/\epsilon$ und im massiven Fall (6.29 [11])

$$\Gamma_q(\mu, m_q; \epsilon) = C_F \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_q^2}{\mu^2}\right) - 2\right].$$

Für Gluonen gilt $\Gamma_g = \gamma_g/\epsilon$. Im Allgemeinen hat Γ_g einen weiteren Beitrag von Aufspaltungen eines Gluons in Paare von massiven Quarks in den reellen Prozessen. Dieser Beitrag tritt nicht auf, wenn allein die Masse des Top-Quarks berücksichtigt wird.

Ohne Beteiligung von massiven externen Teilchen gilt $\mathcal{V}_j = \epsilon^{-2}$. Durch das Top-Quark im Endzustand kann jedoch ein massives Teilchen als Emitter oder Beobachter beteiligt sein, jedoch nicht beide. Im massiven Fall gilt allgemein

$$\mathcal{V}_j(s_{jk}, m_j, m_k; \epsilon, \kappa) = \mathcal{V}^{(S)}(s_{jk}, m_j, m_k; \epsilon) + \mathcal{V}_j^{(NS)}(s_{jk}, m_j, m_k; \kappa).$$

Zur Angabe der beiden Anteile wird

$$Q_{jk}^2 = s_{jk} + m_j^2 + m_k^2$$

eingeführt. Der nicht vom Typ des Emitters abhängende Anteil ist (6.20 [11])

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(S)}(s_{jk}, m_j > 0, 0; \epsilon) &= \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon} \ln\left(\frac{m_j^2}{s_{jk}}\right) - \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{m_j^2}{s_{jk}}\right) - \frac{\pi^2}{12} \\ &- \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_j^2}{s_{jk}}\right) \ln\left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_j^2}{Q_{jk}^2}\right).\end{aligned}$$

Für ein massives Quark als Emittter gilt (6.22 [11])

$$\mathcal{V}_q^{(\text{NS})} = \frac{\gamma_q}{C_F} \ln \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right) - \frac{m_j^2}{s_{jk}} \ln \left(\frac{m_j^2}{Q_{jk}^2} \right),$$

während für ein massives Quark als Beobachter (6.23 [11])

$$\mathcal{V}_q^{(\text{NS})} = \frac{\gamma_q}{C_F} \left[\ln \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{Q_{jk} - m_k}{Q_{jk}} \right) - \frac{2m_k}{Q_{jk} + m_k} \right] + \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right)$$

gilt. Zuletzt wird der Fall mit einem Gluon als Emittter (6.24 [11])

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_g^{(\text{NS})} = \frac{\gamma_g}{C_A} & \left[\ln \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{Q_{jk} - m_k}{Q_{jk}} \right) - \frac{2m_k}{Q_{jk} + m_k} \right] + \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left(\frac{s_{jk}}{Q_{jk}^2} \right) \\ & + \left(\kappa - \frac{2}{3} \right) \frac{m_k^2}{s_{jk}} \left[\left(\frac{2T_f}{C_A} n_f - 1 \right) \ln \left(\frac{2m_k}{Q_{jk} + m_k} \right) \right] \end{aligned}$$

angegeben. Der Parameter κ tritt ebenfalls im Subtraktionsterm auf und muss konsistent gewählt werden. Durch die Wahl $\kappa = 2/3$ kann $\mathcal{V}_g^{(\text{NS})}$ vereinfacht werden.

Anwendung auf die Produktion von Jets bei Elektron-Positron-Annihilationen

Für $e^+e^- \rightarrow u(p_1)\bar{u}(p_2)$ hat der Subtraktionsterm

$$\mathcal{I} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} V_I \left[T_1 T_2 \hat{\mathcal{I}}^{12} + T_2 T_1 \hat{\mathcal{I}}^{21} \right] \quad (3.8)$$

zwei Beiträge. Im ersten Beitrag bildet das Up-Antiquark den Beobachter, im zweiten Beitrag das Up-Quark. Anwendung von Gl. (3.7) für zwei Partonen im Endzustand im masselosen Fall ergibt

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}^{12} &= \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{1}{C_F} \left[\frac{\gamma_q}{\epsilon} + \gamma_q \ln \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right) + \gamma_q + K_q \right] \\ &= \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left[\frac{3}{2\epsilon} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right) + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right] \\ &= \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{3}{2\epsilon} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{10}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Für den zweiten Beitrag gilt $\hat{\mathcal{I}}^{21} = \hat{\mathcal{I}}^{12}$, da Quarks und Antiquarks im Formalismus nicht unterschiedlich behandelt werden. Nach Auswertung der Farbkorrelation in Gl. (3.8), welche zu einem Faktor $(-C_F)$ führt, folgt

$$d\sigma^{\text{B}} \otimes \mathcal{I} = \frac{C_F \alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 10 - \pi^2 + O(\epsilon) \right\}.$$

Die Pole in ϵ kürzen sich nun mit denen der virtuellen Korrekturen [55]

$$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}) = |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu_R^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left\{ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \pi^2 + O(\epsilon) \right\}.$$

Die Integration über den partonischen Phasenraum ist nun möglich und führt zu

$$\sigma^{\text{VI}} = \sigma_{\text{LO}} \frac{2C_F\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{2s} \int d\Phi^{(2)} |\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2 = C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_{\text{LO}}.$$

Zusammen mit dem Wert von $\sigma^{\text{R}} = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \sigma_{\text{LO}}$ aus (3.5) führt dies zum bekannten Ergebnis (z. B. (17.9) [51])

$$\sigma_{\text{NLO}} = \left(1 + \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F\right) \sigma_{\text{LO}} = \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \sigma_{\text{LO}}$$

für den inklusiven Wirkungsquerschnitt der Elektron-Positron-Annihilation in nächstführender Ordnung der QCD.

Resonante Diagramme im Prozess $gb \rightarrow td\bar{u}$

Im Abschnitt zu den virtuellen Korrekturen wurde festgestellt, dass die Entfernung resonanter Born-Diagramme in der Farbmatrix vorgenommen werden kann. Für den integrierten Subtraktionsterm entspricht dies einer Modifikation

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der farbkorrelierten Matrixelemente. Im Gegensatz zur führenden Ordnung gilt $C_{12} \neq 0$, dies äußert sich im Auftreten des Mischterms $2\text{Re}[(\mathcal{A}_{\text{Born}}^l)^* \mathcal{A}_{\text{Born}}^s]$. Wegen der Orthogonalität der Farbmatrix entspricht diese Modifikation der Farbmatrix der Halbierung des Mischterms und dem Weglassen von $|\mathcal{A}_{\text{Born}}^s|^2$. Das Auftreten des Mischterms in der nächstführenden Ordnung entspricht dem in den virtuellen Korrekturen möglichen Farbaustausch zwischen der leichten und der schweren Quark-Linie. In den reellen Prozessen wurden keine resonanten Diagramme berücksichtigt. Für den Subtraktionsterm der reellen Prozesse wurden die farbkorrelierten Matrixelemente daher nicht modifiziert. Dies gilt ebenfalls für den Beitrag $\hat{\sigma}^{\text{PK}}$ aus dem nächsten Unterabschnitt.

3.3.5 Einlaufende Partonen im Subtraktionsformalismus

Für Prozesse mit einlaufenden Teilchen mit Farbladung tritt ein Beitrag

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ab}^{\text{PK}}(p_a, p_b, \mu_F^2) &= \sum_{a'} \int_{2 \rightarrow m} \int_0^1 dx \left[d\sigma_{a'b}^{\text{B}}(xp_a, p_b) \otimes (\mathcal{P} + \mathcal{K})^{a,a'}(x, \mu_F^2) \right]_{\epsilon=0} \\ &+ \sum_{b'} \int_{2 \rightarrow m} \int_0^1 dx \left[d\sigma_{ab'}^{\text{B}}(p_a, xp_b) \otimes (\mathcal{P} + \mathcal{K})^{b,b'}(x, \mu_F^2) \right]_{\epsilon=0} \end{aligned}$$

mit expliziter Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala μ_F auf, der zur konsistenten Behandlung von kollinearen Singularitäten im Zusammenspiel mit den Partonverteilungsfunktionen benötigt wird. In diesem Beitrag wird über den Phasenraum der führenden Ordnung und eine weitere Variable x integriert, welche den longitudinalen Impulsbruchteil nach einer kollinearen Abstrahlung beschreibt. Die Summe in a' und b' läuft über alle im

Prozess	1. Teilchen		2. Teilchen	
$ub \rightarrow tdg$	gu	$2f_1^g f_2^b$	gb	$f_2^g(f_1^u + f_1^c)$
$u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g$	gu	$f_1^g(f_2^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}})$	$g\bar{d}$	$f_2^g(f_1^u + f_1^c)$
$\bar{d}b \rightarrow t\bar{u}g$	$g\bar{d}$	$2f_1^g f_2^b$	gb	$f_2^g(f_1^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}})$
$gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}$	qg	$(f_2^c + f_2^u)f_1^\Sigma$	gu	$2f_1^g f_2^g$
$gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$	qg	$2f_2^b f_1^\Sigma$	gb	$2f_1^g f_2^g$
$g\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}$	qg	$(f_2^{\bar{d}} + f_2^{\bar{s}})f_1^\Sigma$	gd	$2f_1^g f_2^g$
$f_1^\Sigma = f_1^u + f_1^d + f_1^s + f_1^c + f_1^b + f_1^{\bar{u}} + f_1^{\bar{d}} + f_1^{\bar{s}} + f_1^{\bar{c}} + f_1^{\bar{b}}$				

Tabelle 3.8: Übersicht über mögliche Aufspaltungen der einlaufenden Teilchen mit den zugehörigen Vorfaktoren

Proton enthaltenen Partonen. Der Fall $a' = a$ und $b' = b$ entspricht der kollinearen Abstrahlung eines Gluons. In diesem Fall ist der Vorfaktor aus Partonverteilungsfunktionen unverändert gegenüber der führenden Ordnung. Die kollineare Abstrahlung eines Quarks oder eines Antiquarks führt zu Beiträgen mit den in Tabelle 3.8 angegebenen Vorfaktoren. Ein einlaufendes Gluon für den harten Wirkungsquerschnitt σ^B ist bei kollinear Abstrahlung eines Quarks für beliebige masselose Quarks im Proton möglich, daher tritt in den Vorfaktoren die Größe f_1^Σ auf. In \mathcal{P} und \mathcal{K} tritt neben der Delta-Distribution auch die Plus-Distribution mit der Eigenschaft

$$\int_0^1 dx [f(x)]_+ g(x) = \int_0^1 dx f(x) [g(x) - g(1)]$$

auf. Im Folgenden wird nach Angabe von \mathcal{P} und \mathcal{K} für den masselosen Fall auf die numerische Auswertung der Distributionen eingegangen.

Term mit der Faktorisierungsskalenabhängigkeit bei zwei einlaufenden Hadronen

Die explizite Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala μ_F ist in (6.67 [11])

$$\mathcal{P}^{a,\bar{a}}(x) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{C_{\bar{a}}} P^{a\bar{a}}(x) \left[T_b T_{\bar{a}} \ln \frac{\mu_F^2}{s_{ab}} + \sum_j T_j T_{\bar{a}} \ln \frac{\mu_F^2}{s_{ja}} \right]$$

enthalten. Die Funktionen (5.94 [11])

$$\begin{aligned} P^{qq}(x) &= -C_F(1+x) + 2C_F \left[\frac{1}{1-x} \right]_+ + \frac{3}{2} C_F \delta(1-x), \\ P^{gg}(x) &= 2C_A \left[\frac{1-x}{x} - 1 + x(1-x) \right] + 2C_a \left[\frac{1}{1-x} \right]_+ + \left(\frac{11}{6} C_A - \frac{2}{3} n_f T_f \right) \delta(1-x), \\ P^{qg}(x) &= C_F \frac{1+(1-x)^2}{x} \text{ und } P^{gq}(x) = T_f [x^2 + (1-x)^2] \end{aligned}$$

sind die Splitting-Funktionen in führender Ordnung aus den DGLAP-Gleichungen. Diese von Dokshitzer [75], Gribov, Lipatow [76], Altarelli und Parisi [77] gefundenen Gleichungen beschreiben die Abhängigkeit der Partonverteilungsfunktionen von der Faktorisierungsskala.

Term ohne Faktorisierungsskalenabhängigkeit bei zwei einlaufenden Hadronen

Im Gegensatz zu \mathcal{P} gibt es im Allgemeinen eine Abhängigkeit von der Masse des Beobachters. Zur Diskussion der auftretenden Distributionen genügt die Betrachtung von (C.33 [71])

$$\mathcal{K}^{a,\bar{a}}(x) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\bar{K}^{a\bar{a}}(x) + \delta^{a\bar{a}} \sum_i T_i T_{\bar{a}} \frac{\gamma_i}{C_i} \left(\left[\frac{1}{1-x} \right]_+ + \delta(1-x) \right) \right] - \frac{\alpha_s}{2\pi} T_b T_{\bar{a}} \frac{\tilde{K}^{a\bar{a}}(x)}{C_{\bar{a}}}$$

im masselosen Fall. Der Beitrag \bar{K} beinhaltet keine Farbkorrelation. In den Ausdrücken (C.16, C.17, C.18 [71])

$$\begin{aligned} \bar{K}^{qq}(x) &= C_F \left(\left[\left(\frac{2}{1-x} \right) \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \right]_+ - (1+x) \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) + (1-x) \right) \\ &\quad - \delta(1-x) C_F [5 - \pi^2], \\ \bar{K}^{gg}(x) &= 2C_A \left(\left[\frac{1}{1-x} \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \right]_+ + \left(\frac{1-x}{x} - 1 + x(1-x) \right) \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \right) \\ &\quad - \delta(1-x) \left[\left(\frac{50}{9} - \pi^2 \right) C_A - \frac{16}{9} n_f T_f \right] \text{ und} \\ \tilde{K}^{a\bar{a}} &= P_{\text{reg}}^{a\bar{a}} \ln(1-x) + \delta^{a\bar{a}} C_a \left(\left[\frac{2}{1-x} \ln(1-x) \right]_+ - \frac{\pi^2}{3} \delta(1-x) \right) \end{aligned}$$

treten Distributionen auf. Die Funktionen $P_{\text{reg}}^{a\bar{a}}$ sowie \bar{K}^{qq} und \bar{K}^{gg} enthalten keine Distributionen (C.10, C.15, C.16 [71]).

Auswertung der Distributionen

In $(\mathcal{P} + \mathcal{K})(x)$ treten Delta- und Plus-Distributionen sowie Anteile ohne Distributionen auf. Die allgemeine Form ist daher

$$\mathcal{P}(x) + \mathcal{K}(x) =: (\mathcal{P} + \mathcal{K})(x) = \sum_a A_a(x) + \sum_b \delta(1-x) B_b(x) + \sum_c [C_c(x)]_+ D_c(x)$$

mit stetigen Funktionen $A_a(x)$, $B_b(x)$, $C_c(x)$ und $D_d(x)$. Nach der Auswertung der Distributionen folgt

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx f(x) (\mathcal{P} + \mathcal{K})(x) = \left[\int_0^1 dx f(x) \sum_a A_a(x) \right] + \left[f(1) \sum_b B_b(1) \right] \\ &\quad + \left[\int_0^1 dx \left\{ f(x) \sum_c C_c(x) D_c(x) - f(1) \sum_c C_c(x) D_c(1) \right\} \right]. \end{aligned}$$

LAB	Laborsystem
PCMS	partonisches Schwerpunktssystem des Endpunkts
PACMS	part. Schwerpunktssystem des regulären Anteils (a)
PBCMS	part. Schwerpunktssystem des regulären Anteils (b)

Tabelle 3.9: Übersicht über die verschiedenen Bezugssysteme

Neben $A(x) = \sum_a A_a(x)$ und $B(x) = \sum_b B_b(x)$ werden nun $E(x) = \sum_c C_c(x)D_c(x)$ und $F(x) = \sum_c C_c(x)D_c(1)$ eingeführt. Wegen $\int_0^1 dx = 1$ lässt sich auch der Beitrag mit $B(1)$ als Integral schreiben. Im Integral

$$I = \int_0^1 dx (f(x) [A(x) + E(x)] + f(1) [B(1) - F(x)])$$

wird die Funktionen $f(x)$ im ersten Beitrag regulär und im zweiten Beitrag am Endpunkt $x = 1$ ausgewertet. Bei der Berechnung von

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a^{\text{PK}} &= \int_0^1 dx \int_{2 \rightarrow m} [\mathrm{d}\hat{\sigma}^B(xp_a, p_b) \otimes (\mathcal{P} + \mathcal{K})(x)] \\ &= \int_0^1 dx \int_{2 \rightarrow m} [\mathrm{d}\hat{\sigma}^B(p_a, p_b) (B(1) - F(x)) + \mathrm{d}\hat{\sigma}^B(xp_a, p_b) (A(x) + E(x))] \end{aligned}$$

entspricht dies unterschiedlichen Punkten im Phasenraum. Der Beitrag mit einer kollinearen Abstrahlung vom Teilchen b mit $\mathrm{d}\hat{\sigma}^B(p_a, xp_b)$ ist analog. Die partonischen Schwerpunktssysteme des Endpunktanteils und des regulären Anteils unterscheiden sich nun. Sollen die partonischen Impulse stets im partonischen Schwerpunktssystem erzeugt werden, erfordert dies die Anwendung von mehreren Boosts.

Boosts bei einlaufenden Partonen

In Tabelle 3.9 werden die vier zu unterscheidenden Bezugssysteme angegeben. Neben den Bezugssystemen LAB und PCMS der führenden Ordnung gibt es Bezugssysteme PACMS und PBCMS, die bei der Auswertung von $\hat{\sigma}_a^{\text{PK}}$ und $\hat{\sigma}_b^{\text{PK}}$ auftreten. Im Folgenden soll der Boost von PACMS nach LAB ermittelt werden. Die einlaufenden Impulse des Endpunktanteils werden weiterhin mit p_a und p_b bezeichnet. Zur Unterscheidung seien die einlaufenden Impulse des regulären Anteils nun \bar{p}_a und \bar{p}_b . Im Bezugssystem PCMS gilt

$$\bar{p}_a = xp_a = \frac{x\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, 0, 0, 1) \text{ und } \bar{p}_b = p_b = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, 0, 0, -1)$$

für die Impulse aus $\hat{\sigma}_a^{\text{PK}}$. Daraus folgt

$$\bar{s} = (\bar{p}_a + \bar{p}_b)^2 = (xp_a + p_b)^2 = 2xp_ap_b = x(p_a + p_b)^2 = x\hat{s}$$

für die Schwerpunktsenergie des regulären Anteils zum Quadrat. In PACMS gilt hingegen

$$\bar{p}_a = \frac{\sqrt{\bar{s}}}{2}(1, 0, 0, 1) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, 0, 0, 1) \text{ und } \bar{p}_b = \frac{\sqrt{\bar{s}}}{2}(1, 0, 0, -1) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, 0, 0, -1)$$

für die Impulse des regulären Anteils in $\hat{\sigma}_a^{\text{PK}}$. Für den Boost von PACMS nach PCMS muss daher

$$\frac{x\sqrt{\hat{s}}}{2} = E' = \gamma(E - \beta p_z) = \gamma \frac{\sqrt{x}\sqrt{\hat{s}}}{2}(1 - \beta) \Rightarrow \beta = \frac{1 - x}{1 + x}$$

gelten, während

$$\frac{x\sqrt{\hat{s}}}{2} = E' = \gamma(E - \beta p_z) = \gamma \frac{\sqrt{x}\sqrt{\hat{s}}}{2}(1 + \beta) \Rightarrow \beta = \frac{x - 1}{1 + x}$$

für den Boost von PBCMS nach PCMS gilt. Der Boost von PACMS nach LAB erfolgt nun durch einen ersten Boost von PACMS nach PCMS mit $\beta_1 = \frac{1-x}{1+x}$ und einen anschließenden Boost von PCMS nach LAB mit $\beta_2 = \frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}$ gemäß Gl. (2.8).

3.4 Validierung der Rechnung

In diesem Abschnitt soll die Implementierung der Rechnung zum einen durch Tests auf interne Konsistenz und zum anderen durch externe Vergleiche validiert werden. Die interne Konsistenz kann durch das Kürzen der UV- und IR-Divergenzen für jeden einzelnen Phasenraumpunkt überprüft werden. Die gesamte Rechnung wurde im Rahmen eines gemeinsamen Projektes ebenfalls von Duc Ninh Le [12] unabhängig implementiert, dadurch ist ein externer Vergleich für alle Komponenten der Rechnung möglich, sowohl für einzelne Phasenraumpunkte als auch für inklusive Wirkungsquerschnitte und Histogramme von differenziellen Wirkungsquerschnitten.

Die numerische Stabilität der Rechnung wurde durch Reskalierung der Impulse abgeschätzt. Durch Änderung der Einheit der Energie, z. B. von GeV nach MeV, werden die Mantissen aller Größen mit Massendimension ungleich Null verändert. Für eine $2 \rightarrow n$ Amplitude \mathcal{A} gilt für die Massendimension wegen Gl. (2.6) $[|\mathcal{A}|^2] = 4 - 2n$. Dies führt im Fall $n = 3$ zu einem Faktor 10^{-6} für das Betragsquadrat beim Einheitenwechsel von GeV zu MeV. In der numerischen Rechnung mit doppelter Genauigkeit (64 Bit) gibt es hingegen durch Verlust von numerisch signifikanten Stellen im Allgemeinen keine exakte Übereinstimmung. Mit der Größe

$$\Delta = -\log_{10} \left(\left| 1 - \frac{|\mathcal{A}_r|^2}{|\mathcal{A}|^2} \right| \right) \quad \text{für } |\mathcal{A}_r|^2 \neq |\mathcal{A}|^2$$

lässt sich die numerische Abweichung des durch Reskalierung berechneten Wertes $|\mathcal{A}_r|^2$ von $|\mathcal{A}|^2$ quantifizieren, wobei im Folgenden für eine vollständige numerische Übereinstimmung $\Delta = 16$ angegeben wird.

3.4.1 Tests der internen Konsistenz

Für die virtuellen Korrekturen wurden drei Verfahren zur Reduktion der Tensorintegrale auf skalare Integrale implementiert. Die numerische Stabilität der virtuellen Korrekturen wurde für verschiedene Kombinationen dieser Reduktionen überprüft. Für die physikalischen Endergebnisse und die folgende Validierung wurde die Reduktion nach Passarino und Veltman für B- und C-Integrale sowie die Bibliothek PJFry [64] für die D-

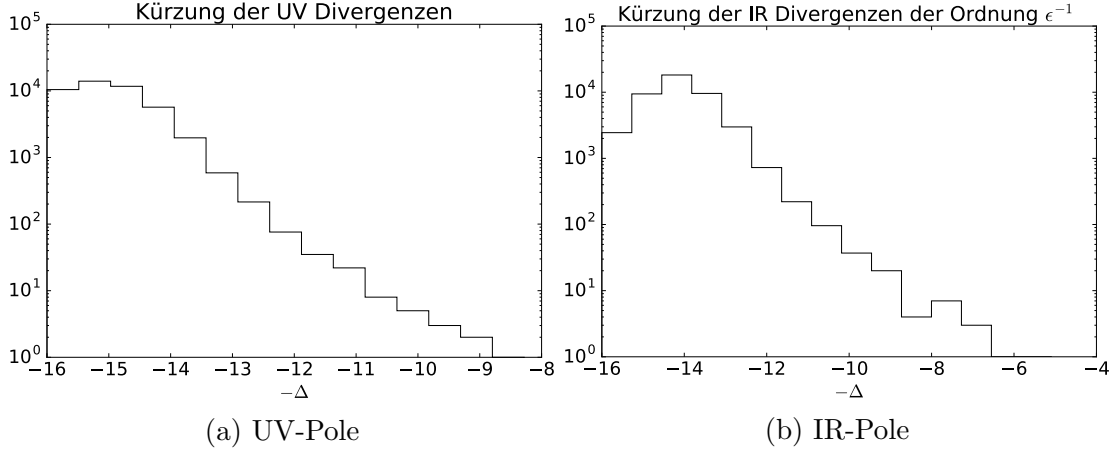


Abbildung 3.7: Histogramme für die Kürzung der Pole der Ordnung $O(\frac{1}{\epsilon})$

und E-Integrale verwendet. Diese Kombination erwies sich als vorteilhaft für die numerische Stabilität bei der Auswertung der virtuellen Korrekturen. Bei den folgenden Tests der Kürzung von Divergenzen führt der Verlust von numerisch signifikanten Stellen zwangsläufig zu numerischen Abweichungen. Bei erfolgreicher numerischer Kürzung zwischen Ausdrücken mit analytischer Übereinstimmung wird eine numerische Abweichung erwartet, welche durch Stellen ohne numerische Signifikanz erklärt wird.

Die Kürzung der **UV-Divergenzen** zwischen der Einschleifen-Amplitude $\mathcal{A}_{\text{1Loop}}$ und der Counterterm-Amplitude \mathcal{A}_{CT} kann numerisch für jeden Phasenraumpunkt getestet werden. In Tabelle 3.10 sind die entsprechenden Anteile in der Ordnung $O(\frac{1}{\epsilon})$ für den Referenzphasenraumpunkt aus dem Anhang A.4 angegeben. In allen 12 Prozessen stimmen die Beträge in mindestens 13 Stellen überein. In den Anfangszuständen *bg* und *gb* wurden in $\mathcal{A}_{\text{Born}}$ die resonanten Diagramme entfernt. Resonante Diagramme ohne Farbaustausch in $\mathcal{A}_{\text{1Loop}}$ tragen wegen der Farbalgebra nicht zum Interferenzterm bei. Die Teilamplitude aus Diagrammen mit Farbaustausch enthält keine UV-Divergenzen. In Abb. 3.7a wird die Kürzung der UV-Divergenzen für 44799 Phasenraumpunkte in einem Histogramm gezeigt. Die Summe aller Prozesse der führenden Ordnung für die Produktion von einzelnen Top-Quarks wurde dabei bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ über den Phasenraum und die Partonverteilungsfunktionen zum hadronischen Wirkungsquerschnitt integriert. Nach der Adaptierung des Integrationsgitters wurde für jeden Phasenraumpunkt der UV-Pole der Einschleifen-Amplitude und des Counterterms ausgegeben. Für 44364 Phasenraumpunkte, über 99%, gilt $\Delta > 13$ und für 9 Punkte $\Delta < 10$. Der Test der numerischen Stabilität von $|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2$ führt zu einem Histogramm, welches Abb. 3.7a quantitativ ähnelt. Das Histogramm für die numerische Kürzung der UV-Divergenzen wird daher durch die numerische Stabilität der Born-Amplituden erklärt.

Bei den **IR-Divergenzen** können die Pole in den Ordnung $O(\epsilon^{-1})$ und $O(\epsilon^{-2})$ der virtuellen Korrekturen mit denen des integrierten Subtraktionsterms verglichen werden. Die Kürzung der IR-Divergenzen der Ordnung $O(\epsilon^{-1})$ stellt dabei den ersten internen Test der Einschleifen-Amplitude mit Farbaustausch dar, da die Diagramme dieser Amplitude keine UV-Divergenzen und keine IR-Divergenzen der Ordnung $O(\epsilon^{-2})$ enthalten. Dieser Anteil enthält mit E-Integralen den numerisch schwierigsten Anteil der virtuellen Korrekturen. In Tabelle 3.11 wird die Kürzung für den Referenzphasenraumpunkt und in Abb. 3.7b für 43788 Phasenraumpunkte gezeigt. Für 99% der Punkte gilt $\Delta > 11,7$ und

Prozess	$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}})$	$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{CT}})$	Δ
$ub \rightarrow gdt$	1,556282107920263e-03	-1,556282107920290e-03	13,77
$bu \rightarrow gdt$	5,953402379277559e-03	-5,953402379277636e-03	13,89
$u\bar{d} \rightarrow g\bar{b}t$	4,265557145567677e-04	-4,265557145567702e-04	14,23
$\bar{d}u \rightarrow g\bar{b}t$	8,799883050128388e-05	-8,799883050128454e-05	14,12
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow g\bar{u}t$	1,569323955288804e-04	-1,569323955288827e-04	13,83
$b\bar{d} \rightarrow g\bar{u}t$	2,852076433388747e-03	-2,852076433388787e-03	13,85
$gu \rightarrow \bar{b}dt$	8,701970303293689e-05	-8,701970303293689e-05	16,00
$ug \rightarrow \bar{b}dt$	1,078308018162063e-04	-1,078308018162054e-04	14,07
$gb \rightarrow \bar{u}dt$	8,585440959386347e-06	-8,585440959386357e-06	14,91
$bg \rightarrow \bar{u}dt$	5,162977002540307e-04	-5,162977002540250e-04	13,95
$g\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	2,472500079647182e-04	-2,472500079647183e-04	15,35
$\bar{d}g \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	2,970645276633471e-05	-2,970645276633451e-05	14,18

Tabelle 3.10: Kürzung der Pole aus UV-Divergenzen

Prozess	I Operator	$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}})$	Δ
$ub \rightarrow gdt$	-1,54948929454975e-03	1,54948929454968e-03	13,36
$bu \rightarrow gdt$	-1,15376418452792e-03	1,15376418452765e-03	12,64
$u\bar{d} \rightarrow g\bar{b}t$	-5,24949281592195e-04	5,24949281592193e-04	14,57
$\bar{d}u \rightarrow g\bar{b}t$	-1,07972994608197e-04	1,07972994608197e-04	14,48
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow g\bar{u}t$	-1,51001963805279e-04	1,51001963805281e-04	13,79
$b\bar{d} \rightarrow g\bar{u}t$	-5,48088055745495e-04	5,48088055745441e-04	13,01
$gu \rightarrow \bar{b}dt$	-5,47412538060229e-05	5,47412538060210e-05	13,46
$ug \rightarrow \bar{b}dt$	-1,52849091527722e-04	1,52849091527723e-04	14,15
$gb \rightarrow \bar{u}dt$	-1,47723860224296e-05	1,47723860224299e-05	13,70
$bg \rightarrow \bar{u}dt$	-1,88805044393363e-04	1,88805044393390e-04	12,85
$g\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	-1,90814340219466e-04	1,90814340219457e-04	13,36
$\bar{d}g \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	-4,08282155667371e-05	4,08282155667368e-05	14,19

Tabelle 3.11: Kürzung der Pole aus IR-Divergenzen in der Ordnung $O(\frac{1}{\epsilon})$

für 59 Punkte $\Delta < 10$. Die höhere Zahl an Phasenraumpunkten mit weniger als 10 Stellen Übereinstimmung wird durch das Auftreten von D- und E-Integralen in diesem Anteil der Rechnung erklärt. Der Test der numerischen Stabilität der virtuellen Korrekturen führt zu einem Histogramm, welches Abb. 3.7b quantitativ ähnelt.

Für die Rechnung wurden zwei **technische Schnitte** bei der Phasenraumintegration verwendet. Das physikalische Endergebnis hängt bei Berücksichtigung der Unsicherheiten nicht von den technischen Schnitten ab. In den virtuellen Korrekturen des Prozesses $gb \rightarrow td\bar{u}$ enthalten die Einschleifen-Diagramme in $2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{\text{E}}]$ resonante Diagramme. Zur Stabilisierung der Monte-Carlo-Integration wurde für die Größe

$$R_{\text{VB}} = \frac{2\pi}{\alpha_s} \frac{2\text{Re} [\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{1\text{Loop}}^{\text{E}}]}{|\mathcal{A}_{\text{Born}}|^2},$$

sie beschreibt die Größe der Einschleifen-Amplitude relativ zur Born-Amplitude, ein Schnitt bei $R_{\text{VB}} > 200$ durchgeführt. Dieser Schnitt hat keine Auswirkungen auf nicht resonante Bereiche des Phasenraums. Durch Anwendung dieses Schnitts verbessert sich die Unsicherheit des entsprechenden Anteils von $\sigma_{\text{E}}^{\text{V}} = (-0,01 \pm 0,02) \text{ pb}$ zu $\sigma_{\text{E}}^{\text{V}} = (0,0199 \pm 0,0005) \text{ pb}$. Der Anteil ist klein im Vergleich zu den gesamten virtuellen Korrekturen $\sigma^{\text{V}} = (-2,687 \pm 0,005) \text{ pb}$. Auf eine ausführliche Diskussion dieses technischen Schnitts wird daher verzichtet.

Für die Integration der reellen Prozesse wird ebenfalls ein technischer Schnitt verwendet. Der Subtraktionsterm kürzt kollineare und weiche Divergenzen. In diesen wird das Betragsquadrat der Amplitude und der entsprechende Subtraktionsterm numerisch groß. Die notwendige numerische Subtraktion führt zu einem Verlust von signifikanten Stellen. Zur Begrenzung dieses Effekts wird ein technischer Schnitt C^{Cut} eingeführt, der singuläre Phasenraumpunkte verhindert. Dafür wird die Größe

$$C_{ij} = \left| \frac{2(p_i p_j)}{s} \right| \text{ mit } s = 2(p_1 p_2)$$

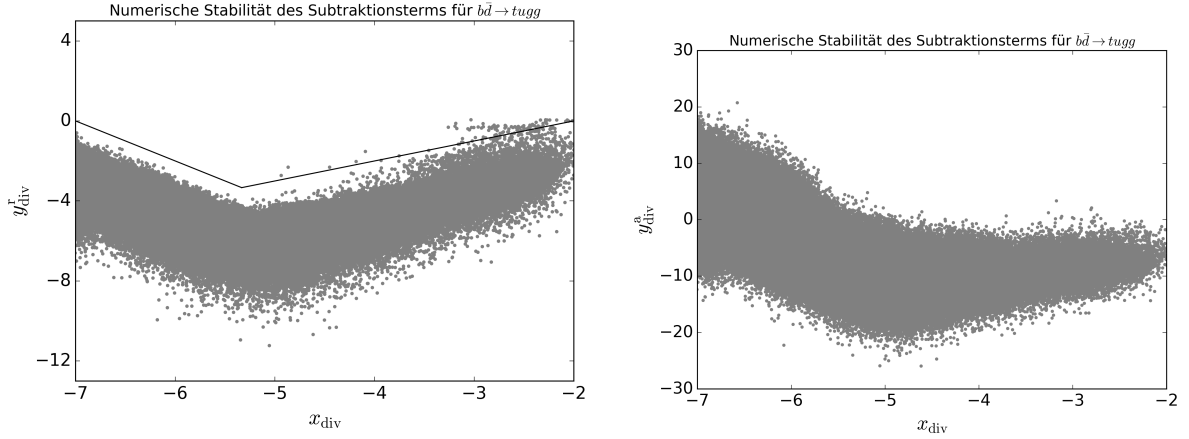
definiert, die in singulären Phasenraumpunkten für mindestens ein Paar von i und j klein wird. Phasenraumpunkte mit $C_{ij} < C^{\text{Cut}}$ für mindestens ein Paar von Teilchen werden daher durch den technischen Schnitt verworfen. Es wurde der Wert $C^{\text{Cut}} = 3 \cdot 10^{-6}$ gewählt. Für Abb. 3.8a wurde der Prozess $b\bar{d} \rightarrow t\bar{u}g\bar{g}$ mit $C^{\text{Cut}} = 0$ zum hadronischen Wirkungsquerschnitt integriert. Für die Ordinatenachse wird

$$y_{\text{div}}^{\text{r}} = \log_{10} \left| 1 - \frac{S}{|\mathcal{A}_{\text{R}}|^2} \right|$$

angegeben, ein Maß für die übereinstimmenden Stellen zwischen dem Subtraktionsterm S und $|\mathcal{A}_{\text{R}}|^2$. Auf der Abszissenachse wird

$$x_{\text{div}} = \log_{10} \sqrt{\frac{\min(s_{ij})}{s_{12}}} \text{ mit } i \neq j \text{ und } s_{ij} = 2(p_i p_j)$$

angegeben. Die Abbildung zeigt nun ein Streudiagramm aller Phasenraumpunkte mit $-7 < x_{\text{div}} < -2$. Darüber hinaus sind zwei Strecken mit Anstieg -2 und +1 eingezeichnet. Der Anstieg -2 entspricht dem Verhalten von $|\mathcal{A}_{\text{R}}|^2$ in divergenten Bereichen, während der Anstieg +1 der Kürzung der führenden Divergenz entspricht. In Abb. 3.8a



- (a) Bei $x_{\text{div}}^c \approx -5,5$ ändert sich der Anstieg (Strecken mit Anstieg -2 und +1 wurden zum besseren Verständnis hinzugefügt)
- (b) Für $x_{\text{div}} < x_{\text{div}}^c$ kann $||\mathcal{A}_R|^2 - S|$ große numerische Werte annehmen

Abbildung 3.8: Kürzung in $(|\mathcal{A}_R|^2 - S)$ für den Prozess $b\bar{d} \rightarrow t\bar{u}gg$

sind bei $x_{\text{div}} < x_{\text{div}}^c \approx -5,5$ Phasenraumpunkte zu sehen, für welche die numerische Kürzung der führenden Divergenz bei der Berechnung mit doppelter Genauigkeit scheitert. Die entsprechenden Streudiagramme für andere Prozesse und andere hadronische Schwerpunktsenergien führen zu vergleichbaren Werten von x_{div}^c . In Abb.3.8b wird auf der Ordinatenachse $y_{\text{div}}^a = \log_{10} (||\mathcal{A}_R|^2 - S|)$ angegeben. Im Bereich mit $x_{\text{div}} < x_{\text{div}}^c$ kann $||\mathcal{A}_R|^2 - S|$ große numerische Werte annehmen. Wegen des Verlustes der numerischen Signifikanz in diesem Bereich dürfen diese Werte nicht berücksichtigt werden. Beim Verwenden des technischen Schnitts für die reellen Korrekturen werden alle Phasenraumpunkte mit $x_{\text{div}} < \frac{1}{2} \log_{10} |C^{\text{Cut}}|$ verworfen. Der Wert $x_{\text{div}}^c = -5,5$ entspricht $C^{\text{Cut}} = 10^{-11}$.

3.4.2 Externe Vergleiche

Für einen Vergleich der **führenden Ordnung** werden die Betragsquadrate der Born-Amplitude ohne die Faktoren $(2\pi)^{-5}$ und $(2\hat{s})^{-1}$ aus dem Phasenraumintegral in Tabelle 3.12 für den Referenzphasenraumpunkt A.4 angegeben. Bei den Anfangszuständen gb und bg wurden resonante Diagramme entfernt. In der dritten Spalte wurden die Vorfaktoren aus der CKM-Matrix und Partonverteilungsfunktionen aus `PDF4LHC15_nlo_100_pdfas` für $x_1 = 0,1$ und $x_2 = 0,2$ bei der Faktorisierungsskala $\mu_F = m_t$ hinzugefügt. Für die starke Kopplungskonstante wurde $\alpha_s = 0,107609175077735$ bei der Renormierungsskala $\mu_R = m_t$ verwendet. In der vierten Spalte sind für einen externen Vergleich Werte von Duc Ninh Le angegeben. In allen Fällen gibt es Übereinstimmung in mindestens 13 signifikanten Stellen. Die numerische Abweichung in den weiteren Stellen ist die Folge von Rundungsfehlern.

Für die **virtuellen Korrekturen** wird in Tabelle 3.13 ein externer Vergleich mit dem Programm `GOSAM` [78] gezeigt. Für den Referenzphasenraumpunkt wird der Interferenzterm $2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}})$ verglichen. Für diesen Vergleich wurden resonante Diagramme nicht entfernt. Weiterhin wurde ein Faktor

$$\frac{\alpha_s^2}{2\pi} \Gamma(1 + \epsilon) (4\pi)^\epsilon$$

Prozess	$ \mathcal{A} ^2$	$ \mathcal{A} ^2 \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	$ \mathcal{A} ^2 \times \text{CKM} \times \text{PDF DNL}$	Δ
$ub \rightarrow gdt$	2,967082306663e-05	4,177845961242e-06	4,177845961242e-06	14,6
$bu \rightarrow gdt$	1,138716902841e-04	5,426196257725e-05	5,426196257725e-05	14,6
$u\bar{d} \rightarrow g\bar{b}t$	8,108498049553e-06	8,369185140006e-06	8,369185140006e-06	14,6
$\bar{d}u \rightarrow g\bar{b}t$	1,671828070683e-06	4,581736131468e-06	4,581736131468e-06	14,8
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow g\bar{u}t$	2,891923261540e-06	1,135961421997e-07	1,135961421997e-07	16,0
$b\bar{d} \rightarrow g\bar{u}t$	5,384506609107e-05	2,667286374242e-06	2,667286374242e-06	15,2
$gu \rightarrow \bar{b}dt$	1,379232424018e-06	2,765280189853e-05	2,765280189852e-05	13,2
$ug \rightarrow \bar{b}dt$	2,053339010986e-06	1,520555287947e-05	1,520555287947e-05	14,7
$gb \rightarrow \bar{u}dt$	1,630362739973e-07	6,284184550067e-08	6,284184550067e-08	15,7
$bg \rightarrow \bar{u}dt$	9,804418168035e-06	4,723710674584e-06	4,723710674584e-06	15,4
$g\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	4,564939492145e-06	9,514384782278e-06	9,514384782277e-06	13,2
$\bar{d}g \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	5,491848423156e-07	1,134525046757e-06	1,134525046757e-06	14,1

Tabelle 3.12: Vergleich des Betragsquadrats der Born-Amplitude (in GeV^{-2}) mit Duc Ninh Le

aus der virtuellen Amplitude ausgeklammert. In allen Fällen gibt es eine Übereinstimmung in mindestens 9 signifikanten Stellen.

Die Summe aus den virtuellen Korrekturen und dem integrierten Subtraktionsterm ist unabhängig vom ausgeklammerten Vorfaktor. Für die Summe findet ein Vergleich mit einer Implementierung von Duc Ninh Le statt, welche den integrierten Subtraktionsterm wiederum mit dem Programm SUPERAUTODIPOLE [79] berechnet. Resonante Diagramme wurden in beiden Anteilen entfernt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.14 angegeben. In 11 Fällen gibt es eine Übereinstimmung in mindestens 12 signifikanten Stellen, für den Prozess $ub \rightarrow gdt$ stimmen 11 Stellen überein.

In Tabelle 3.15 sind die Betragsquadrate der Amplituden für die reellen Prozesse mit zwei Gluonen nach dem Entfernen der resonanten Diagramme angegeben. Der zugehörige Phasenraumpunkt ist im Anhang A.4 angegeben. Weiterhin wird der **Subtraktionsterm** angegeben und mit der externen Implementierung von Duc Ninh Le verglichen. Die Tabellen A.1 und A.2 zeigen den Vergleich für ein abgestrahltes Paar aus Quark und Antiquark. Für den Prozess $c\bar{c} \rightarrow \bar{u}\bar{d}dt$ verschwindet der Subtraktionsterm, da in den nicht resonanten Diagrammen dieses Prozesses keine Divergenzen auftreten. In genau zwei Fällen gibt es weniger als 9 Stellen Übereinstimmung, $u\bar{d} \rightarrow gg\bar{b}t$ und $\bar{d}\bar{b} \rightarrow gg\bar{u}t$. Für diese beiden Fälle ist der Subtraktionsterm und $|\mathcal{A}_R|^2$ klein gegenüber den anderen Fällen.

Für die Beiträge zu σ^{PK} ist ein Vergleich für einen einzelnen Phasenraumpunkt wegen der auftretenden Distributionen schwierig. Stattdessen wird ein externer Vergleich [12] des differentiellen hadronischen Wirkungsquerschnitts in nächstführender Ordnung mit $k_T^{\text{min}} = 20 \text{ GeV}$ und $\eta^{\text{max}} = 4,5$ präsentiert. Die Schnitte werden dabei auch an das Top-Quark angelegt. Als Observablen für diesen Vergleich werden die transversalen Impulse sowie die Rapiditäten des Top-Quark (Abb. 3.9), des ersten Jets (Abb. 3.10) sowie des

Prozess	$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}})$	GOSAM	Δ
$ub \rightarrow gdt$	3,381510377635e-03	3,381510377651e-03	11,3
$bu \rightarrow gdt$	1,031715887040e-02	1,031715887044e-02	11,4
$u\bar{d} \rightarrow g\bar{b}t$	2,138324894419e-03	2,138324894428e-03	11,4
$\bar{d}u \rightarrow g\bar{b}t$	4,123279493634e-04	4,123279493634e-04	13,6
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow g\bar{u}t$	4,486124964003e-05	4,486124963416e-05	9,9
$b\bar{d} \rightarrow g\bar{u}t$	8,447082413530e-03	8,447082413536e-03	12,2
$gu \rightarrow \bar{b}dt$	-5,460629612826e-05	-5,460629612359e-05	10,1
$ug \rightarrow \bar{b}dt$	2,134643007315e-04	2,134643007435e-04	10,2
$gb \rightarrow \bar{u}dt$	-6,786298481703e-05	-6,786298482506e-05	9,9
$bg \rightarrow \bar{u}dt$	9,886336470886e-04	9,886336467375e-04	9,4
$g\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	-1,147140096378e-04	-1,147140096499e-04	10,0
$\bar{d}g \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	4,399472188997e-05	4,399472188837e-05	10,4

Tabelle 3.13: Vergleich der virtuellen Amplitude ohne Faktor $\alpha_s^2/(2\pi)$ mit GOSAM , resonante Diagramme für die Anfangszustände gb und bg wurden nicht entfernt

Prozess	$2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}}) + \mathcal{I}$	DNL	Δ
$ub \rightarrow gdt$	-1,07972873975455e-06	-1,07972873975294e-06	11,83
$bu \rightarrow gdt$	-1,68906151751677e-05	-1,68906151751673e-05	13,61
$u\bar{d} \rightarrow g\bar{b}t$	2,12495955071804e-06	2,12495955071791e-06	13,19
$\bar{d}u \rightarrow g\bar{b}t$	3,83263456329893e-07	3,83263456329874e-07	13,29
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow g\bar{u}t$	-6,48771418560352e-07	-6,48771418560622e-07	12,38
$b\bar{d} \rightarrow g\bar{u}t$	-1,18545454099589e-06	-1,18545454099574e-06	12,92
$gu \rightarrow \bar{b}dt$	-5,32705016383745e-07	-5,32705016383759e-07	13,58
$ug \rightarrow \bar{b}dt$	-1,91774804400186e-07	-1,91774804400105e-07	12,37
$gb \rightarrow \bar{u}dt$	-6,93135149679575e-08	-6,93135149679798e-08	12,49
$bg \rightarrow \bar{u}dt$	-3,59632966645893e-06	-3,59632966645996e-06	12,54
$g\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	-1,64550974700546e-06	-1,64550974700537e-06	13,27
$\bar{d}g \rightarrow \bar{b}\bar{u}t$	-7,85435496948692e-08	-7,85435496948582e-08	12,85

Tabelle 3.14: Vergleich der Summe aus den virtuellen Korrekturen und dem integrierten Subtraktionsterm mit Duc Ninh Le für $\alpha_s = 0,109411611899149$

Prozess	$ \mathcal{A}_R ^2 \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	$S \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	DNL	Δ
$ub \rightarrow ggdt$	2,340219283286e-08	5,3704825835e-08	5,3704825842e-08	9,9
$bu \rightarrow ggdt$	2,332950907500e-02	2,3259255332e-02	2,3259255333e-02	10,4
$u\bar{d} \rightarrow gg\bar{b}t$	7,828601063685e-11	1,0826126114e-10	1,0826126091e-10	8,7
$\bar{d}u \rightarrow gg\bar{b}t$	3,272374821315e-03	4,4713342769e-03	4,4713342770e-03	10,5
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow gg\bar{u}t$	7,833801908195e-11	1,1801448355e-10	1,1801448381e-10	8,7
$b\bar{d} \rightarrow gg\bar{u}t$	6,559937053049e+02	6,8181105957e+02	6,8181105963e+02	10,0
$gu \rightarrow \bar{b}gdt$	4,398013071122e+01	6,5361739195e+01	6,5361739197e+01	10,5
$ug \rightarrow \bar{b}gdt$	1,479709555727e+01	1,4754051555e+01	1,4754051556e+01	10,4
$gb \rightarrow \bar{u}gdt$	1,517855931176e-03	1,2636799879e-03	1,2636799880e-03	10,6
$bg \rightarrow \bar{u}gdt$	1,651368191129e-07	1,7827029065e-07	1,7827029065e-07	10,4
$g\bar{d} \rightarrow \bar{u}g\bar{b}t$	6,026419724896e+02	9,0128230030e+02	9,0128230034e+02	10,4
$\bar{d}g \rightarrow \bar{u}g\bar{b}t$	3,274464311648e-03	4,8575457505e-03	4,8575457507e-03	10,5
$gg \rightarrow \bar{u}\bar{b}dt$	6,560524707083e+02	6,8188526196e+02	6,8188526202e+02	10,0

Tabelle 3.15: Reelle Korrekturen und Subtraktionsterm für $ub \rightarrow dtgg$

zweiten Jets (Abb. 3.11) gewählt. Zum Vergleich der beiden Rechnungen wird ebenfalls

$$\delta = \frac{\sigma^{\text{SM}} - \sigma^{\text{DNL}}}{\sqrt{(\Delta\sigma^{\text{SM}})^2 + (\Delta\sigma^{\text{DNL}})^2}}$$

angegeben. Die Unsicherheit $\Delta\sigma^{\text{SM}}$ wurde aus den 10 Iterationen der Monte-Carlo-Integration durch das ungewichtete Mittel bestimmt. Die Unsicherheit $\Delta\sigma^{\text{DNL}}$ wurden durch die Integration mit BASES [80] bestimmt. Wegen des Subtraktionsterms ist die Fehlerabschätzung für σ^{R} dabei nicht zuverlässig. Für die gezeigten Abbildungen wurde daher $\Delta\sigma^{\text{DNL}} = \Delta\sigma^{\text{SM}}$ verwendet. In Abb. 3.11a für den transversalen Impuls k_T des zweiten Jets gilt bei $k_T > 400 \text{ GeV}$ für viele Punkte $|\delta| > 2$. Die Erklärung dafür liegt in unterschätzten Unsicherheiten $\Delta\sigma^{\text{DNL}}$ in diesem Bereich, wie der Vergleich mit σ^{DNL} zeigt. Insgesamt wird für Bereiche mit verlässlichen Vorhersagen für σ^{DNL} eine Übereinstimmung innerhalb der statistischen Unsicherheiten festgestellt.

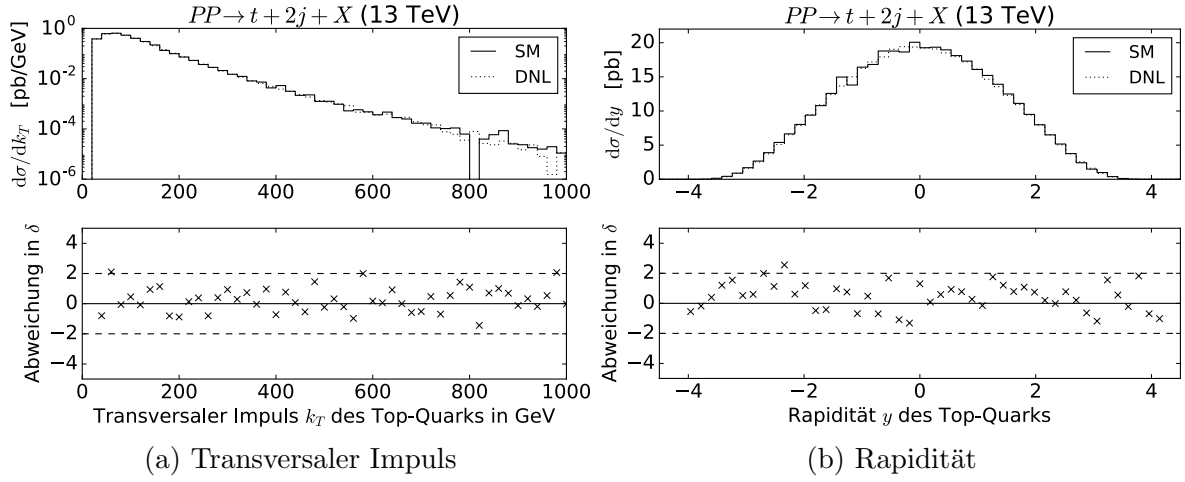


Abbildung 3.9: Top-Quark

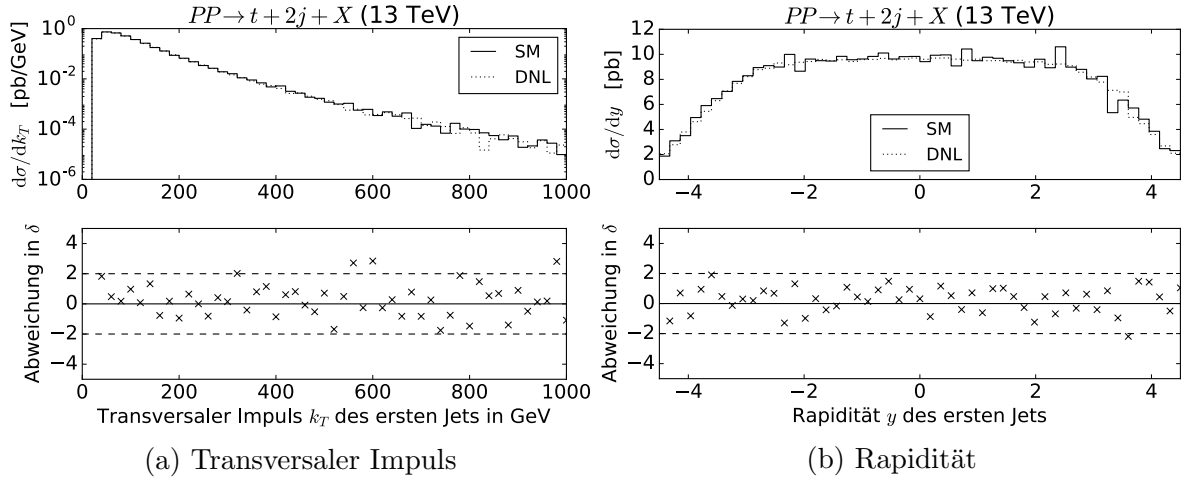


Abbildung 3.10: Erster Jet

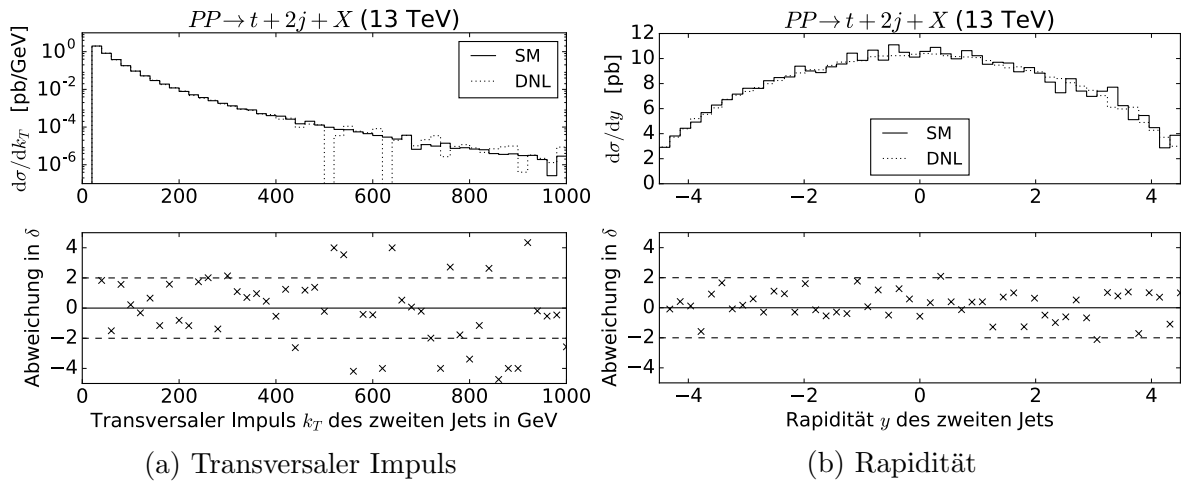


Abbildung 3.11: Zweiter Jet

4 Ergebnisse in nächstführender Ordnung der QCD

In diesem Kapitel werden Wirkungsquerschnitte für verschiedene hadronische Schwerpunktsenergien als Ergebnis präsentiert. Zunächst werden Teilergebnisse für den inklusiven Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ und der zentralen Skala $\mu = \mu_R = \mu_F = m_t$ tabelliert. Als Endresultat werden weitere inklusive Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Werten von $\sqrt{s_{\text{had}}}$ und μ angegeben. Anschließend wird die Skalenvariation untersucht, um Korrekturen in höherer Ordnung abzuschätzen. Dabei wird die Renormierungsskala μ_R getrennt von der Faktorisierungsskala μ_F variiert. Im folgenden Abschnitt werden Histogramme von differenziellen Wirkungsquerschnitten bei einer festen zentralen Skala $\mu = m_t$ gezeigt, dafür werden unter anderem transversale Impulse und Pseudorapiditäten als Observablen gewählt. Im letzten Abschnitt werden Ergebnisse mit einer dynamischen Wahl der Skala μ präsentiert. Diese Wahl ist vorteilhaft bei der Beschreibung von Top-Quarks und Jets mit hohen transversalen Impulsen.

4.1 Inklusive Wirkungsquerschnitte

Für den Wirkungsquerschnitt in nächstführender Ordnung (NLO) der QCD wurden der Born-Wirkungsquerschnitt σ^B , die integrierten Dipole σ^I , der Beitrag zur Behandlung einlaufender Partonen σ^{PK} , die reellen Prozesse abzüglich Subtraktionsterm σ^R und die virtuellen Korrekturen σ^V getrennt numerisch integriert. Es wurden die Parameter

$$\begin{aligned} m_t &= 173,21 \text{ GeV}, \\ m_w &= 80,385 \text{ GeV}, \\ G_F &= 1,6638 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}, \\ k_T^{\min} &= 25 \text{ GeV und} \\ \eta^{\max} &= 2,5 \end{aligned}$$

bei einer hadronischen Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ verwendet und die Partonverteilungsfunktionen aus `PDF4LHC15_nlo_100_pdfas` genutzt [44]. Als zentrale Skala wurde $\mu = \mu_F = \mu_R = m_t$ gewählt. Bei der Monte-Carlo-Integration wurden fünf Iterationen zur Anpassung des Gitters und zehn Iterationen zur Bestimmung des Integrals und seiner statistischen Unsicherheit durchgeführt. Für den Anti- k_T Algorithmus wurde ein minimaler Jet-Abstand von $R^{\min} = 0,4$ verwendet. Von jedem Jet wurde ein minimaler transversaler Impuls k_T^{\min} und ein maximaler Betrag der Pseudorapidität von η^{\max} gefordert, während keine Schnitte an das Top-Quark angelegt wurden.

Prozesse (Anzahl)	$\sigma_{\text{ABCD}}^{\text{V}}$ [pb]	$\sigma_{\text{E}}^{\text{V}}$ [pb]	σ^{I} [pb]	σ^{PK} [pb]
$ub \rightarrow tdg$ (2)	-0,931(1)	0,0065(1)	0,271(4)	0,669(4)
$u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}g$ (2)	0,4568(2)	-0,03388(9)	-0,1435(2)	0,180(1)
$\bar{d}b \rightarrow t\bar{u}g$ (2)	- 0,3485(7)	-0,0008333(7)	0,235(1)	0,132(3)
$gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}$ (2)	-0,877(1)	0,0357(1)	-1,190(1)	4,621(5)
$gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ (2)	-0,1988(2)	0,00202(4)	-0,0631(5)	0,482(3)
$g\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}$ (2)	-0,4976(4)	0,01084(2)	-0,2840(4)	1,585(5)
t Produktion (12)	-2,396(2)	0,0204(2)	-1,175(4)	7,669(9)
$\bar{u}\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}g$ (2)	-0,3880(9)	0,00329(2)	0,222(1)	0,177(2)
$\bar{u}d \rightarrow \bar{t}bg$ (2)	0,24262(9)	-0,01536(3)	-0,0694(1)	0,0969(2)
$\bar{d}\bar{b} \rightarrow \bar{t}ug$ (2)	-0,5409(5)	-0,00193(2)	0,313(2)	0,252(3)
$g\bar{u} \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{b}$ (2)	-0,4356(4)	0,01012(2)	-0,2607(4)	1,504(2)
$g\bar{b} \rightarrow \bar{t}\bar{d}u$ (2)	-0,1987(2)	0,00199(4)	-0,0624(4)	0,482(1)
$gd \rightarrow \bar{t}ub$ (2)	-0,7382(6)	0,01934(4)	-0,6368(8)	2,752(4)
\bar{t} Produktion (12)	-2,059(1)	0,01744(7)	-0,495(3)	5,264(6)

Tabelle 4.1: Virtuelle Korrekturen für eichinvariante Teilamplituden ohne Farbaustausch $\sigma_{\text{ABCD}}^{\text{V}}$ und mit Farbaustausch $\sigma_{\text{E}}^{\text{V}}$, integrierter Subtraktionsterm σ^{I} und σ^{PK} (statistische Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration in Klammern)

Teilergebnisse für die virtuellen Korrekturen

Die virtuellen Korrekturen $\sigma^{\text{V}} = \sigma_{\text{ABCD}}^{\text{V}} + \sigma_{\text{E}}^{\text{V}}$ wurden einzeln in den verschiedenen Anfangszuständen integriert. Der Beitrag aus der eichinvarianten Teilamplitude mit Farbaustausch

$$\sigma_{\text{E}}^{\text{V}} = \int d\Phi^{(3)} F_{\text{J}}^{(3)} 2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* \mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{\text{E}})$$

wurde dabei getrennt vom Beitrag aus den eichinvarianten Teilamplituden ohne Farbaustausch

$$\sigma_{\text{ABCD}}^{\text{V}} = \int d\Phi^{(3)} F_{\text{J}}^{(3)} 2\text{Re}(\mathcal{A}_{\text{Born}}^* [\mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{\text{A}} + \mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{\text{B}} + \mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{\text{C}} + \mathcal{A}_{\text{1Loop}}^{\text{D}}])$$

berechnet. In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse und die entsprechenden statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration für die Beiträge ohne Farbaustausch in der zweiten Spalte angegeben. Keiner der 24 berechneten Prozesse ist vernachlässigbar. Die Anzahl an Aufrufen in jeder Iteration beträgt $2 \cdot 10^6$, für die Anfangszustände ub und $g\bar{u}$ wurde jedoch eine höhere Statistik von 10^7 Aufrufen pro Iteration verwendet. Mit dieser Anzahl an Aufrufen in der Monte-Carlo-Integration wurde für die Summe aller Prozesse eine relative statistische Unsicherheit unterhalb von 0,1% erreicht.

Die Beiträge zu den virtuellen Korrekturen aus Diagrammen mit Farbaustausch sind in Tabelle 4.1 in der dritten Spalte angegeben. Beim Prozess $gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ muss neben der

statistischen Unsicherheit aus der Monte-Carlo-Integration auch ein systematischer Fehler durch Anwenden eines technischen Schnitts mit einem Parameter R_{VB} berücksichtigt werden. Wegen $\sigma_{gb} = 0,00194(3)$ pb für $R_{VB} = 50$, $\sigma_{gb} = 0,00202(4)$ pb für $R_{VB} = 200$ und $\sigma_{gb} = 0,0022(2)$ pb für $R_{VB} = 800$ wird dieser Fehler durch $\sigma = 0,0020(4)$ pb abgeschätzt. Dieser Wert ist klein gegenüber der statistischen Unsicherheit der gesamten virtuellen Korrekturen. Für alle 12 Prozesse erfolgten bei der numerischen Integration 10^5 Aufrufe pro Iteration. Damit wurde eine relative statistische Unsicherheit von 1% (0,4%) für diesen Beitrag erreicht, der Wert für die \bar{t} Produktion wurde in Klammern angegeben. Die Summe aller Beiträge der virtuellen Korrekturen mit Farbaustausch ist mit 0,02 pb klein gegenüber den physikalischen Unsicherheiten des Wirkungsquerschnitts. Sowohl bei Top-Quark als auch bei Top-Antiquark Produktion könnten diese Beiträge daher in guter Näherung vernachlässigt werden. Die Beiträge σ_E^V werden jedoch bei den folgenden Ergebnissen berücksichtigt. Die geringe Größe des Beitrags mit Farbaustausch σ_E^V lässt sich zum Teil durch die Farbalgebra der QCD erklären. Aus der Farbmatrix für die virtuellen Korrekturen lässt sich sofort eine Unterdrückung um einen Faktor N_C ablesen.

Teilergebnisse für die reellen Korrekturen

Die Phasenraumintegration der reellen Prozesse zu σ^R führt zu Beiträgen σ_2^R mit einem Top-Quark und zwei Jets im Endzustand sowie zu Beiträgen σ_3^R mit einem Top-Quark und drei Jets im Endzustand. Beide werden in Tabelle 4.2 zusammen mit $\sigma^R = \sigma_2^R + \sigma_3^R$ angegeben, sowohl für die Produktion von Top-Quarks als auch von Top-Antiquarks. Der Wirkungsquerschnitt σ_3^R muss dabei stets positiv sein, da über ein Betragsquadrat integriert wird. Durch den Subtraktionsterm können sich für σ_2^R negative Werte ergeben. Die Prozesse $gg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}\bar{b}$ und $gg \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}b$ stimmen im Ergebnis exakt überein, da die zugehörigen Amplituden identisch sind. Bei den anderen Prozessen unterscheiden sich die Partonen im Anfangszustand, dies führt wegen der Partonverteilungsfunktionen im Allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Im Spezialfall $bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}g$ und $\bar{b}g \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}g$ stimmt σ^R numerisch überein, da das Bottom-Quark ein Seequark ist. Bei den anderen Prozessen sind hingegen Valenzquarks im Anfangszustand beteiligt. Die numerische Übereinstimmung bei den Anfangszuständen gg und bg gilt wegen der Übereinstimmung für jeden Phasenraumpunkt nicht nur für den inklusiven Wirkungsquerschnitt, sondern auch für differenzielle Wirkungsquerschnitte.

Bei Prozessen ohne Gluonen im Endzustand treten keine weichen Divergenzen auf. Diese Prozesse können daher im Allgemeinen mit einer moderaten Anzahl an Aufrufen mit ausreichender Genauigkeit integriert werden. Die 59 Prozesse ohne Beteiligung von Gluonen werden in Tabelle 4.2 zu zwei Gruppen (R5 und R6) zusammengefasst. Die erste Gruppe (R5) aus 21 Prozessen hat dabei im Gegensatz zur zweiten Gruppe (R6) auslaufende Partonen $d\bar{u}$ für die Produktion von Top-Quarks und auslaufende Partonen $\bar{d}u$ für die Produktion von Top-Antiquarks.

Prozesse mit einem Gluon oder zwei Gluonen im Endzustand erfordern im Allgemeinen eine höhere Statistik. Die numerische Unsicherheit wird bei der Produktion von Top-Quarks durch die beiden Prozesse $ug \rightarrow t\bar{d}\bar{b}g$ und $gu \rightarrow t\bar{d}\bar{b}g$ dominiert. Diese Prozesse mit einem Up-Quark und einem Gluon im Anfangszustand haben bereits in führender Ordnung den größten Beitrag zum Wirkungsquerschnitt. Bei der Produktion von Top-Antiquarks wird die Unsicherheit durch $gd \rightarrow \bar{u}ubg$ und $dg \rightarrow \bar{u}ubg$ dominiert. Auch diese Prozesse haben in führender Ordnung den größten Beitrag zum Wirkungsquerschnitt der

Prozesse (Anzahl)	σ_2^R [pb]	σ_3^R [pb]	σ^R [pb]	Statistik
R1: $gg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}b(1)$	-0,364(1)	0,2134(1)	-0,151(1)	10^7
R2: $bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}g(2)$	-0,461(2)	0,2588(1)	-0,202(2)	$5 \cdot 10^7$
R3a: $g\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}g(2)$	-0,623(3)	0,8679(5)	0,245(3)	10^8
R3b: $ug \rightarrow t\bar{d}\bar{b}g(2)$	0,004(4)	3,349(2)	3,353(4)	$4 \cdot 10^8$
R4a: $u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}gg(2)$	-0,587(2)	0,2968(1)	-0,290(2)	$5 \cdot 10^7$
R4b: $b\bar{d} \rightarrow t\bar{u}gg(2)$	-0,349(1)	0,1351(1)	-0,214(1)	$5 \cdot 10^7$
R4c: $bu \rightarrow t\bar{d}gg(2)$	-1,630(3)	0,8995(6)	-0,730(3)	$4 \cdot 10^8$
R5: $q_1q_2 \rightarrow t\bar{d}\bar{u}q_3(21)$	-0,468(1)	0,5069(1)	0,039(1)	10^7
R6: Andere (38)	-0,1443(4)	0,08527(3)	-0,0583(5)	10^7
t Produktion (72)	-4,620(7)	6,612(2)	1,992(7)	
R1: $gg \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}b(1)$	-0,364(1)	0,2134(1)	-0,151(1)	10^7
R2: $\bar{b}g \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}g(2)$	-0,461(2)	0,2588(1)	-0,202(2)	$5 \cdot 10^7$
R3a: $g\bar{d} \rightarrow \bar{t}\bar{u}\bar{b}g(2)$	-0,124(4)	1,790(1)	1,666(4)	$2 \cdot 10^8$
R3b: $\bar{u}g \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{b}g(2)$	-0,790(2)	0,8124(4)	0,022(2)	$5 \cdot 10^7$
R4a: $\bar{u}\bar{d} \rightarrow \bar{t}\bar{b}gg(2)$	-0,284(1)	0,14684(5)	-0,137(1)	10^7
R4b: $\bar{b}\bar{d} \rightarrow \bar{t}\bar{u}gg(2)$	-0,565(4)	0,2771(2)	-0,288(4)	$5 \cdot 10^7$
R4c: $\bar{b}\bar{u} \rightarrow \bar{t}\bar{d}gg(2)$	-0,541(2)	0,2201(1)	-0,321(2)	$5 \cdot 10^7$
R5: $q_1q_2 \rightarrow \bar{t}\bar{d}\bar{u}q_3(21)$	-0,3637(6)	0,29641(5)	-0,0673(6)	10^7
R6: Andere (38)	-0,1556(5)	0,07301(2)	-0,0826(5)	10^7
\bar{t} Produktion (72)	-3,648(7)	4,088(1)	0,440(7)	

Tabelle 4.2: Einzelprozesse bei der Produktion von Top-Quarks bzw. Top-Antiquarks in Assoziation mit zwei Jets (zweite Spalte) und drei Jets (dritte Spalte)

Produktion von einzelnen Top-Antiquarks.

Die reellen Korrekturen haben neben der statistischen Unsicherheit aus der Monte-Carlo-Integration einen systematischen Fehler durch das Anwenden eines technischen Schnitts. Die Werte in Tabelle 4.2 wurden mit dem Wert $C^{\text{Cut}} = 3 \cdot 10^{-6}$ bestimmt. Zur Abschätzung des systematischen Fehlers durch den technischen Schnitt wurden die reellen Korrekturen ebenfalls mit $C^{\text{Cut}} = 10^{-10}$ berechnet. Das entsprechende Ergebnis ist $\sigma_t^R = 1,96(2)$ pb. Bei $C^{\text{Cut}} = 3 \cdot 10^{-6}$ gilt hingegen $\sigma_t^R = 1,992(7)$ pb. Die systematische Unsicherheit aus dem technischen Schnitt wird daher durch 0,05 pb abgeschätzt. Diese Unsicherheit dominiert die Unsicherheit des Gesamtergebnisses.

Die Ergebnisse für die integrierten Dipole σ^I werden in der vierten Spalte von Tabelle 4.1 angegeben. Die integrierten Dipole sind teils positiv und teils negativ. Dies ist erlaubt, da die Summe ($\sigma^I + \sigma^V$) aus virtuellen Korrekturen und integrierten Dipolen wegen der virtuellen Korrekturen negativ sein kann. Der Beitrag σ^{PK} wird in der fünften Spalte von Tabelle 4.1 angegeben. Sowohl bei der Top-Quark als auch bei der Top-Antiquark Produktion beträgt σ^{PK} ungefähr ein Drittel des Wertes von σ^B , dadurch ist eine hohe

Schema	σ_{gb}^I [pb]	$(\sigma_{E,gb}^V + \sigma_{gb}^I)$ [pb]	σ^I [pb]	$(\sigma_E^V + \sigma^I)$ [pb]
A	-0,0631(5)	-0,0611(2)	-1,176(1)	-1,156(1)
B	-0,06229(4)	-0,06229(4)	-1,175(1)	-1,157(1)
C	-0,06229(4)	-0,06229(4)	-1,154(2)	-1,154(2)

Tabelle 4.3: Vergleich der drei Schemen zur Behandlung der Beiträge mit Farbaustausch zwischen den Quark-Linien in σ_{NLO}^t bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$

Statistik bei der Integration erforderlich. Für Tabelle 4.1 wurde σ^{PK} für jeden Prozess einzeln integriert. Im Folgenden werden Ergebnisse mit geringerer Unsicherheit für σ^{PK} und σ^I verwendet, bei denen alle Prozesse zusammen integriert wurden.

Einfluss der resonanten Diagramme

Für die Einschleifen-Amplituden in σ_E^V für Prozesse mit den Anfangszuständen $gb, bg, g\bar{b}$ und $\bar{b}g$ ist eine eindeutige Zuordnung zur Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit Jets oder in Assoziation mit einem W -Boson nicht möglich. Der Einfluss dieser resonanten Diagramme wird durch den Vergleich von drei Schemen untersucht. Im Schema A wird der Beitrag σ_E^V für alle Prozesse berücksichtigt. Im Schema B wird dieser Beitrag für die Prozesse $gb \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ und $bg \rightarrow t\bar{d}\bar{u}$ entfernt. Im Schema C wird σ_E^V für alle Prozesse entfernt. In allen drei Schemen werden die integrierten Dipole σ^I durch Anpassung der Farbmatrix konsistent zu den virtuellen Korrekturen berechnet, die Kürzung der IR-Divergenzen wurde dabei überprüft. Die Bestandteile σ^B , σ^{PK} und σ^R sind in den Schemen A, B und C gleich. In Tabelle 4.3 sind Ergebnisse für σ^I und $(\sigma^I + \sigma_E^V)$ in allen drei Schemen angegeben. Maßgeblich für den Wirkungsquerschnitt ist die letzte Spalte. Die durch eine Monte-Carlo-Integration bestimmte Differenz $(\sigma_C^I - \sigma_A^I) = 0,0214(5) \text{ pb}$ kürzt sich fast vollständig mit dem Wert von $\sigma_{E,A}^V = 0,0204(4) \text{ pb}$. Der resultierende Unterschied zwischen den Schemen A und C von $0,0010(6) \text{ pb}$ beträgt relativ zum inklusiven Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{\text{NLO}} = 28,3 \text{ pb}$ weniger als 0,01%. Diese Kürzung wurde auch für $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$ und ebenfalls für differenzielle Wirkungsquerschnitte überprüft. Es wird insgesamt festgestellt, dass die numerischen Unterschiede zwischen den Schemen A, B und C vernachlässigbar sind. In den Schemen B und C ist die Zuordnung aller Beiträge zur Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit Jets eindeutig. Daraus folgt, dass eine Abgrenzung der Produktion einzelner Top-Quarks in Assoziation mit Jets von anderen Produktionsmechanismen des Top-Quarks möglich ist.

Gesamtergebnisse für den inklusiven Wirkungsquerschnitt

In den Tabellen A.3 und A.4 werden die inklusiven Wirkungsquerschnitte für hadronische Schwerpunktsenergien von 7, 8, 13 und 14 TeV angegeben. Die zugehörigen Unsicherheiten in der Tabelle sind die statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration. Die statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration für σ_{NLO} sind kleiner oder gleich $0,01 \text{ pb}$. Die größte physikalische Unsicherheit der Wirkungsquerschnitte in nächstführender Ordnung folgt aus der Variation der Renormierungsskala μ_R und der Faktorisierungsskala μ_F . Durch diese Variation wird die Größe der Korrekturen in höherer Ordnung der Störungstheorie abgeschätzt. Für die Skalenvariation wurden je

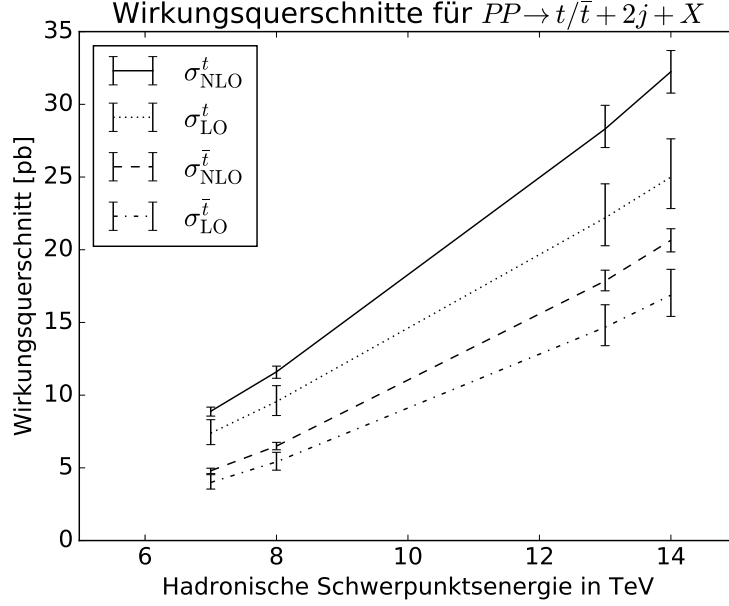


Abbildung 4.1: Wirkungsquerschnitte bei den Werten 7, 8, 13 und 14 TeV für $\sqrt{s_{\text{had}}}$ mit Unsicherheiten aus der Skalenvariation (Sieben-Punkt-Methode)

μ_R	μ_F	σ_{LO}^t [pb]	σ_{NLO}^t [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	$\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$ [pb]
m_t	m_t	22,195(2)	28,307(8)	14,671(1)	17,856(7)
$2m_t$	$2m_t$	20,528(2)	27,03(1)	13,528(1)	17,218(7)
$\frac{1}{2}m_t$	$\frac{1}{2}m_t$	23,960(2)	29,93(1)	15,886(1)	18,597(9)
$\frac{1}{2}m_t$	m_t	24,530(2)	29,527(8)	16,214(1)	18,474(7)
m_t	$\frac{1}{2}m_t$	21,680(2)	28,54(1)	14,374(1)	17,902(9)
m_t	$2m_t$	22,474(2)	28,22(1)	14,811(1)	17,886(7)
$2m_t$	m_t	20,273(2)	27,057(8)	13,400(1)	17,172(7)

Tabelle 4.4: Wirkungsquerschnitte bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13$ TeV

drei Rechnungen mit $\mu = \mu_R = \mu_F$ und $\frac{\mu}{m_t} \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ durchgeführt. Aus diesen Rechnungen lassen sich unter Verwendung des Koeffizienten β_0 aus der β -Funktion der QCD ebenfalls Ergebnisse für $\mu_R \neq \mu_F$ bestimmen. In den Tabellen 4.4 und A.5 wird der Wirkungsquerschnitt für die Produktion einzelner Top-Quarks bzw. Top-Antiquarks für 4 weitere Wahlen der Renormierungs- und Faktorisierungsskala angegeben. Die Skalenvariation nach der Drei- und Sieben-Punkt-Methode lässt sich aus den Tabellen ablesen. Für die Drei-Punkt-Methode wird das Minimum und das Maximum der drei Wirkungsquerschnitte für $\mu = \mu_R = \mu_F \in \{m_t/2, m_t, 2m_t\}$ verwendet. Für die Sieben-Punkt-Methode werden die vier weiteren Wirkungsquerschnitte mit $\frac{1}{2} \leq \mu_R/\mu_F \leq 2$ berücksichtigt, die in den Tabellen 4.4 und A.5 angegeben sind.

Die systematische Unsicherheit durch technische Schnitte wurde für die Top-Quark Produktion bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13$ TeV bereits durch 0,05 pb abgeschätzt. Dies entspricht einer relativen systematischen Unsicherheit in Bezug auf σ_{NLO} von weniger als 0,2%. Für die Produktion von Top-Antiquarks wird von einer gleichen relativen systematischen Unsi-

σ_{LO}	[pb]		[pb]	σ_{NLO}	[pb]		[pb]	K
σ_{LO}^t	22,2	+10,5%	+2,3	σ_{NLO}^t	28,3	+5,8%	+1,6	1,28
		-8,7%	-1,9			-4,5%	-1,3	
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$	14,7	+10,5%	+1,5	$\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$	17,9	+4,1%	+0,7	1,22
		-8,7%	-1,3			-3,8%	-0,7	
$\sigma_{\text{LO}}^{t+\bar{t}}$	36,9	+10,5%	+3,9	$\sigma_{\text{NLO}}^{t+\bar{t}}$	46,2	+5,1%	+2,4	1,25
		-8,7%	-3,2			-4,2%	-1,9	

Tabelle 4.5: Inklusiver Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ mit Skalenunsicherheiten bei Anwendung der Sieben-Punkt-Methode

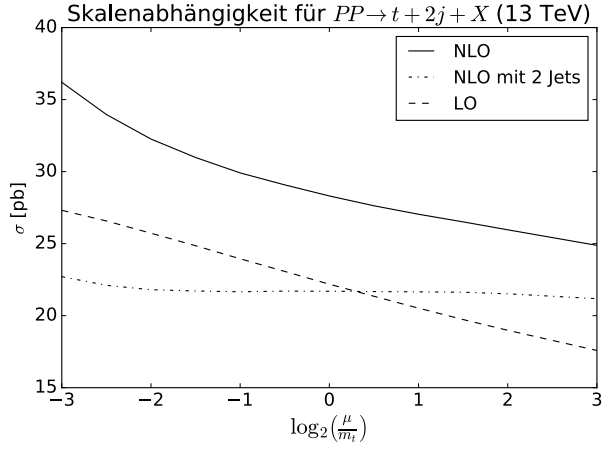
σ_{LO}	[pb]		[pb]	σ_{NLO}	[pb]		[pb]	K
σ_{LO}^t	9,6	+11,5%	+1,1	σ_{NLO}^t	11,6	+3,4%	+0,4	1,21
		-10,0%	-1,0			-3,8%	-0,4	
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$	5,4	+12,1%	+0,7	$\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$	6,5	+4,0%	+0,3	1,20
		-10,5%	-0,6			-3,9%	-0,3	
$\sigma_{\text{LO}}^{t+\bar{t}}$	15,0	+11,7%	+1,8	$\sigma_{\text{NLO}}^{t+\bar{t}}$	18,1	+3,5%	+0,6	1,21
		-10,2%	-1,5			-3,8%	-0,7	

Tabelle 4.6: Inklusiver Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ mit Skalenunsicherheiten bei Anwendung der Sieben-Punkt-Methode

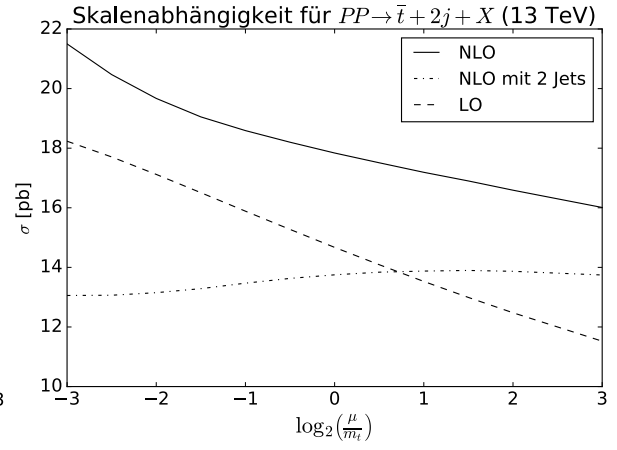
cherheit ausgegangen. Im Folgenden werden die Wirkungsquerschnitte daher auf 0,1 pb gerundet. Der Wert von 0,1 pb ist klein gegebenüber den physikalischen Unsicherheiten aus der Skalenvariation, der Unsicherheit durch α_s und den Unsicherheiten aus den Partonverteilungsfunktionen. Das Endergebnis mit Skalenunsicherheiten bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ bei Verwendung der Sieben-Punkt-Methode ist in Tabelle 4.5 angegeben. Die Größe der Korrekturen wird durch $K = \sigma_{\text{NLO}}/\sigma_{\text{LO}}$ angegeben. Da sich K für die t und die \bar{t} Produktion unterscheiden, ändert sich der Quotient $R_t = \sigma^t/\sigma^{\bar{t}}$ von 1,51 in LO zu 1,58 in NLO. Für die Summe $\sigma^{t+\bar{t}}$ hat sich die relative Unsicherheit aus der Skalenvariation im Vergleich zur führenden Ordnung mehr als halbiert. Die Skalenunsicherheit der Produktion von Top-Antiquarks ist dabei kleiner als die Skalenunsicherheit bei der Produktion von Top-Quarks. In beiden Fällen bleibt die Skalenunsicherheit die größte Unsicherheit des inklusiven Wirkungsquerschnitts. Die Ergebnisse für $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ sind in Tabelle 4.6 angegeben. Sowohl in LO als auch in NLO gilt $R_t = 1,78$. Der Wert von K hängt von der Wahl der zentralen Skala ab. Bei der Wahl der zentralen Skala $\mu = m_t/2$ gilt $K = 1,11$ für die Produktion von Top-Antiquarks. Die unterschiedlichen Werte von K in den Tabellen 4.5 und 4.6 sind daher ein Effekt der Wahl $\mu = m_t$ für die zentrale Skala. In Abb. 4.1 ist die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte und ihrer Skalenunsicherheiten von der hadronischen Schwerpunktsenergie $\sqrt{s_{\text{had}}}$ gezeigt. Die Wirkungsquerschnitte in nächstführender Ordnung sind bei allen betrachteten Energien größer als in führender Ordnung. Die Skalenunsicherheiten in LO und in NLO haben dabei keine Überschneidung.

Diskussion der Skalenabhängigkeit

Die Abhängigkeit von der Skala $\mu = \mu_F = \mu_R$ des totalen Wirkungsquerschnitts der Produktion einzelner Top-Quarks σ_{NLO}^t ist in Abb. 4.2a im Intervall $m_t/8 < \mu < 8m_t$ dargestellt, analog zeigt Abb. 4.2b die Skalenabhängigkeit von $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$. Im betrachteten Intervall ist $\sigma_{\text{NLO}}(\mu)$ ebenso wie $\sigma_{\text{LO}}(\mu)$ monoton fallend. Bei $\mu = m_t$ ist die Skalenabhängigkeit



(a) Top-Quark



(b) Top-Antiquark

Abbildung 4.2: Skalenabhängigkeit von σ_{LO} , σ_{NLO} und $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$

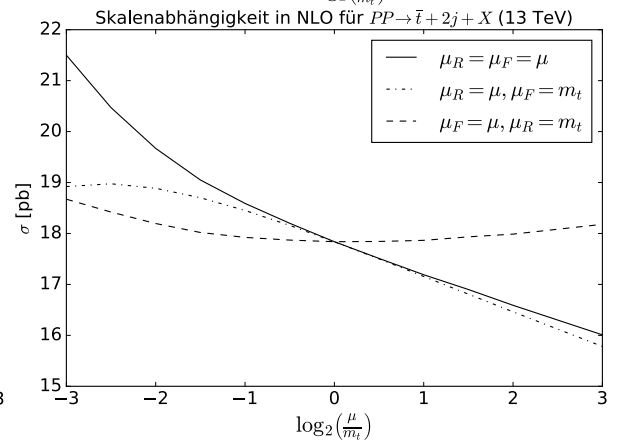
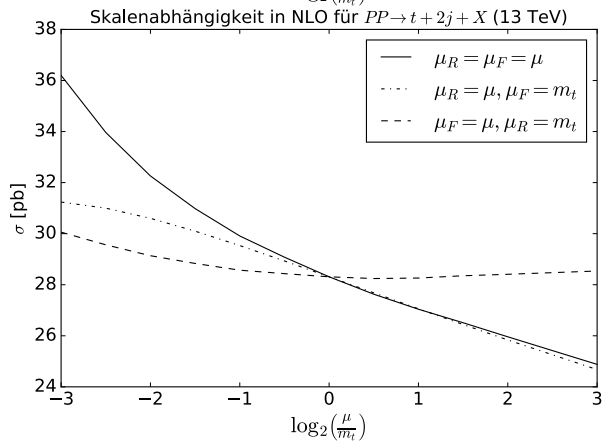
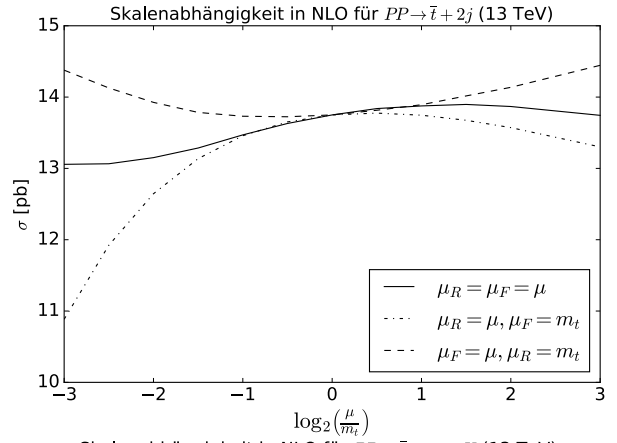
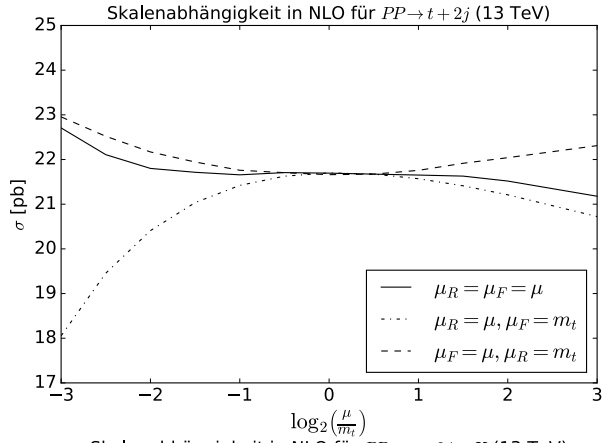


Abbildung 4.3: Getrennte Variation von μ_R und μ_F für $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ (oben) und σ_{NLO} (unten)

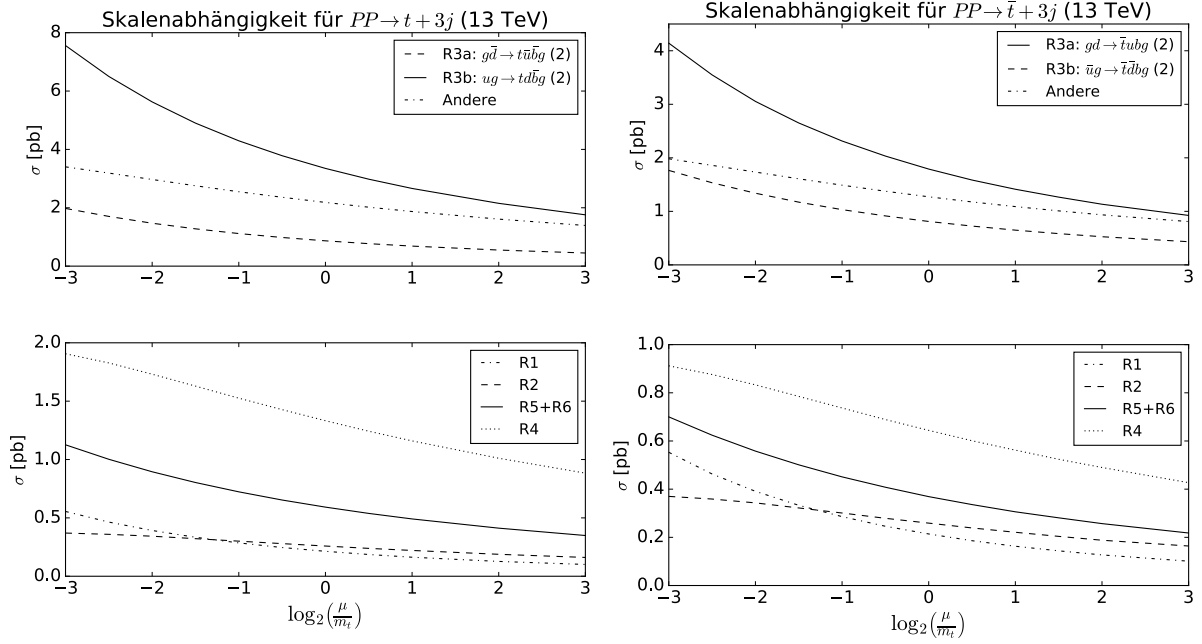


Abbildung 4.4: Skalenabhängigkeit von σ_3^R bei der t Produktion (links) und der \bar{t} Produktion (rechts)

von $\sigma_{\text{NLO}}^t(\mu)$ marginal gegenüber der Skalenabhängigkeit von $\sigma_{\text{LO}}^t(\mu)$ reduziert, für $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$ hingegen ist die Skalenabhängigkeit gegenüber der führenden Ordnung mehr als halbiert. Die aus den Abbildungen abgelesenen Skalenunsicherheiten entsprechen dabei der Drei-Punkt-Methode, da μ_R und μ_F gleichzeitig variiert werden.

Für $\sigma_{\text{LO}}(\mu)$ wird die Monotonie im Wesentlichen durch die Abhängigkeit der starken Kopplungskonstanten α_s von der Renormierungsskala μ_R erklärt. Die in Abb. 4.2 gezeigte Skalenabhängigkeit von σ_{NLO} unterscheidet sich jedoch von vielen anderen Rechnungen in der nächstführenden Ordnung der QCD, in denen es ein lokales Maximum für $\sigma_{\text{NLO}}(\mu)$ gibt. Daher wird ebenfalls $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ gezeigt, der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit genau zwei Jets. In diesem Fall ist die Abhängigkeit von der Skala μ stark reduziert. Zudem schneiden sich $\sigma_{\text{LO}}(\mu)$ und $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ Nahe der Masse des Top-Quarks. In die Differenz $\sigma_{\text{NLO}} - \sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}} = \sigma_3^R$ gehen nur Born-Wirkungsquerschnitte ein. Deren Skalenunsicherheit wird nicht durch die Rechnung in der nächstführenden Ordnung reduziert. Die Skalenabhängigkeit von σ_3^R wird in Abb. 4.4 gezeigt. Für σ_{NLO}^t hat der Prozess $ug \rightarrow t\bar{d}bg$ eine große Abhängigkeit von der Skala, für $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$ hingegen $gd \rightarrow \bar{t}ubg$. Die Summe $\sigma_{\text{NLO}} = \sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}} + \sigma_3^R$ hat eine im Vergleich zur führenden Ordnung kaum reduzierte Skalenabhängigkeit, da der zweite Summand nicht klein gegenüber dem ersten ist.

In Abb. 4.3 werden die Skalen μ_R und μ_F für die Fälle σ_{NLO} und $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ einzeln variiert. Im Fall $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ liegt bei der Variation von μ_R ein Maximum bei $\mu_R \approx m_t$ vor. Im Fall von $\sigma_{\text{NLO}}^t(\mu_R)$ gibt es jedoch einen monoton fallenden Verlauf und bei $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}(\mu_R)$ ein Maximum bei $\mu_R \approx \frac{m_t}{6}$. Für $\mu_F > m_t$ hat $\sigma_{\text{NLO}}^t(\mu_F)$ einen flachen Verlauf, weshalb $\sigma_{\text{NLO}}(\mu)$ und $\sigma_{\text{NLO}}(\mu_R)$ in diesem Bereich nahezu zusammenfallen. Für $\mu_F > m_t$ findet bei $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$ eine leichte Kompensation zwischen den Skalenvariationen statt. Diese Kompensation führt zu einer Abweichung zwischen der Skalenvariation aus der Drei-Punkt-Methode und der Skalenvariation aus der Sieben-Punkt-Methode. Im Bereich $\mu_F < m_t$ fällt $\sigma_{\text{NLO}}(\mu_F)$ monoton.

Das identische Vorzeichen des Anstiegs im Bereich $\mu < m_t$ führt zu einer gegenseitigen Verstärkung der einzelnen Skalenvariation.

Insgesamt hat σ_{NLO} eine moderate Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala und eine starke Abhängigkeit von der Renormierungsskala. Diese Abhängigkeit wird zu großen Teilen durch den Beitrag σ_3^{R} erklärt, in welchem keine Kompensation der Abhängigkeit von μ_R stattfindet.

4.2 Differenzielle Wirkungsquerschnitte mit festen Skalen

Im Folgenden werden Histogramme von differenziellen Wirkungsquerschnitten in führender (LO) und in nächstführender Ordnung (NLO) der QCD bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ gezeigt. Für die Faktorisierungsskala und die Renormierungsskala wird die feste zentrale Skala $\mu = m_t$ verwendet. Die Skalenvariation wird im Intervall $\mu \in [m_t/2, 2m_t]$ nach der Drei-Punkt-Methode abgeschätzt. Für jede Klasse der Histogramme wird außerdem $K = \sigma_{\text{NLO}}/\sigma_{\text{LO}}$ angegeben, ein Maß für die Größe der Korrekturen in nächstführender Ordnung. Zum Vergleich zwischen der Produktion von Top-Quarks und der Produktion von Top-Antiquarks wird zudem das Verhältnis $R_t = \sigma^t/\sigma^{\bar{t}}$ angegeben. Die Klassenbreite („Bin-Breite“) der Histogramme wurde für Bereiche mit geringer Statistik wegen der statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration erhöht.

Transversaler Impuls des Top-Quarks

In Abb. 4.5 wird links die Verteilung für den transversalen Impuls des Top-Quarks im Intervall $0 < k_T < 350 \text{ GeV}$ gezeigt. Für kleine transversale Impulse wird eine Klassenbreite von $12,5 \text{ GeV}$ verwendet, die für höhere transversale Impulse auf 25 GeV erhöht wird. Der dominante Beitrag für den inklusiven Wirkungsquerschnitt kommt von Klassen mit kleinen transversalen Impulsen, so gilt für über 90% der Ereignisse $k_T < 200 \text{ GeV}$. Der durchschnittliche Wert ist $k_T = 114 \text{ GeV}$ in NLO und $k_T = 119 \text{ GeV}$ in LO. Im Bereich mit $k_T < 200 \text{ GeV}$ betragen die Korrekturen in NLO über 20%. Dies führt zur Verkleinerung des durchschnittlichen Wertes von k_T in NLO. Die Unsicherheit aus den Partonverteilungsfunktionen und aus α_s ist für σ_{LO} durch schwarze Linien eingezeichnet. Für alle Klassen des Histogramms sind diese kleiner als die Unsicherheiten aus der Skalenvariation. Auffällig ist ein Sprung von K zwischen der 4. und 5. Klasse bei $k_T = 50 \text{ GeV}$. Dies entspricht dem doppelten Wert des Schnitts k_T^{min} auf den transversalen Impuls der Jets. Der Sprung wird durch den Anteil $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ verursacht, in dessen reellen Korrekturen eine Rekombination von Impulsen durch den Jet-Algorithmus stattfindet. Die Verschiebung des Sprung bei einer anderen Wahl von k_T^{min} wurde überprüft. In der Literatur [81] wird zuweilen der Begriff Sudakov-Schulter für diesen Effekt verwendet.

In Abb. 4.6 wird links $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ und rechts σ_3^{R} für die Produktion von Top-Quarks gezeigt, für deren Summe $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}} + \sigma_3^{\text{R}} = \sigma_{\text{NLO}}$ gilt. Die reellen Korrekturen σ_3^{R} betragen für $k_T^t < 50 \text{ GeV}$ ca. 20% der führenden Ordnung. Für höhere transversale Impulse des Top-Quarks steigt K . Bei $k_T = 350 \text{ GeV}$ ist σ_3^{R} ein größerer Beitrag zu σ_{NLO} als $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$. Ohne Berücksichtigung dieser Beiträge findet daher insbesondere für hohe Werte von k_T keine realistische Beschreibung der Produktion von Top-Quark in NLO statt. Bei $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ befindet sich bei $2k_T^{\text{min}}$ der Sprung in K . Bei der Skalenvariation gibt es bei $k_T \approx 120 \text{ GeV}$ einen Übergangsbereich, ab dem die Skala $\mu = 2m_t$ zu einem größeren Wert von σ_{NLO} führt. Dies führt zu einer Kürzung zwischen den Skalenunsicherheiten von $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ und σ_3^{R} .

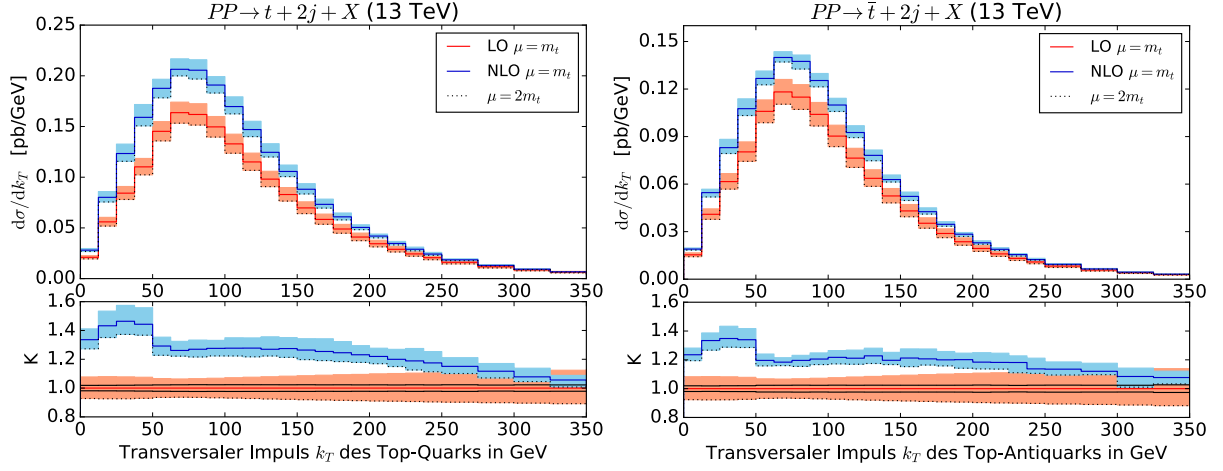


Abbildung 4.5: Transversaler Impuls des Top-Quarks bzw. Top-Antiquarks

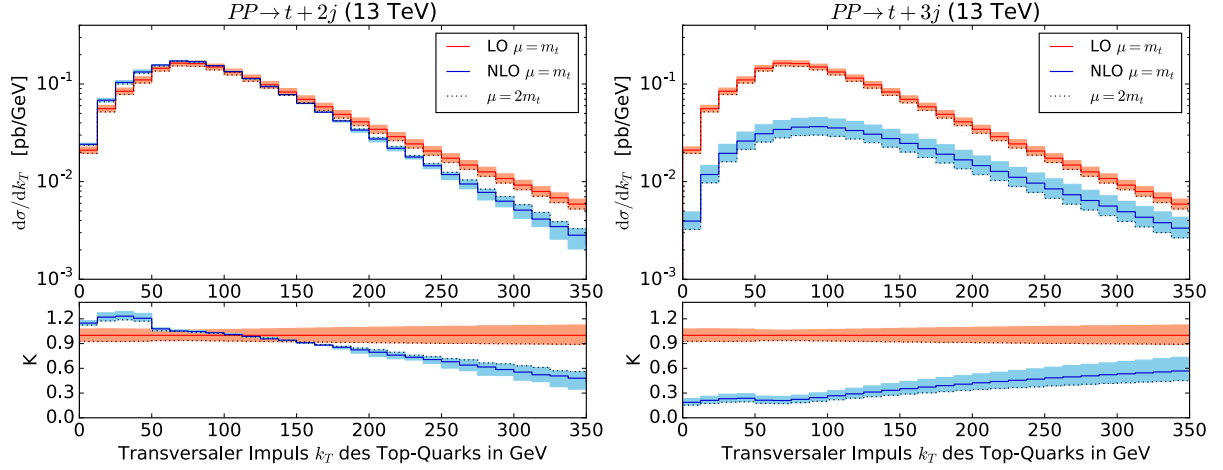


Abbildung 4.6: Zerlegung in $\sigma_{\text{NLO}}^{2\text{Jets}}$ und σ_3^{R} für den transversalen Impuls des Top-Quarks

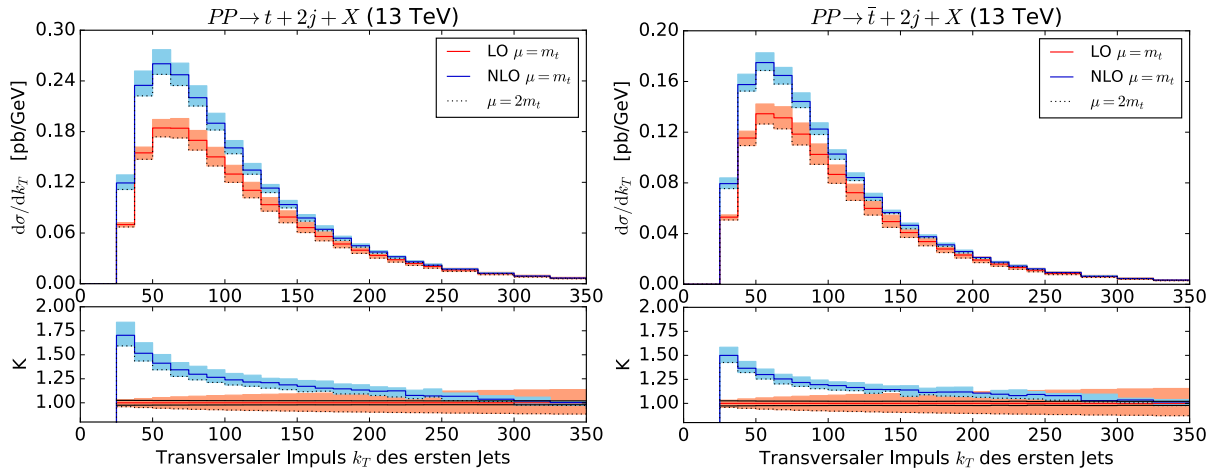


Abbildung 4.7: Transversaler Impuls des ersten Jets (t Produktion links)

In Abb. 4.5 wird rechts die Verteilung für den transversalen Impuls des Top-Antiquarks bei der Produktion von Top-Antiquarks gezeigt. Der durchschnittliche transversale Impuls in NLO ist mit $k_T = 107 \text{ GeV}$ kleiner als bei der t Produktion. Im Vergleich zur Top-Quark Produktion fällt die reduzierte Skalenabhängigkeit in NLO auf, die bereits beim inklusiven Wirkungsquerschnitt gesehen wurde. Analog zur Produktion von Top-Quarks befindet sich bei 50 GeV ein Sprung von K .

In Abb. 4.9a wird die Verteilung für den transversalen Impuls für die Summe $(\sigma^t + \sigma^{\bar{t}})$ bei logarithmischer Skala im Intervall $0 < k_T < 625 \text{ GeV}$ gezeigt. Zur Beschreibung von Top-Quarks mit wesentlich höheren transversalen Impulsen ist die verwendete feste Skala nicht mehr geeignet. Dies zeigt sich durch große Korrekturen in NLO gegenüber der führenden Ordnung, was auf eine schlechte Konvergenz der Störungstheorie hindeutet. Ab etwa 400 GeV gilt $K < 1$. Für höhere transversale Impulse sinkt K weiter. Bei sehr hohen transversalen Impulsen gilt sogar $K < 0$. Für diesen Bereich des Histogramms ist die Verwendung einer dynamischen Skala für μ vorteilhaft. Diese wird im Abschnitt 4.3 beschrieben. In führender Ordnung ist der differenzielle Wirkungsquerschnitt für $\mu = 2m_t$ stets kleiner als bei der zentralen Skala $\mu = m_t$. In NLO ist dies nur für $k_T < 400 \text{ GeV}$ der Fall. Dies führt zu einem Übergangsbereich mit geringen Skalenunsicherheiten des NLO Ergebnisses, in dem sich Skalenunsicherheiten aus der Renormierungsskala und aus der Faktorisierungsskala kürzen. Der Unterschied in der relativen Skalenunsicherheit der verschiedenen Klassen stammt aus der μ_F Abhängigkeit, da die Renormierungsskala sowohl in LO als auch in NLO stets zur gleichen relativen Skalenunsicherheit führt. Die mit k_T steigende relative Skalenunsicherheit in LO ist ein Effekt der Partonverteilungsfunktionen (siehe Abb. 2.6). In NLO wird die μ_F Abhängigkeit demgegenüber deutlich reduziert. Insgesamt ist für hohe k_T eine deutliche Verringerung der Skalenabhängigkeit in NLO gegenüber LO erkennbar.

In Abb. 4.9a findet ebenfalls ein Vergleich zwischen der Produktion von Top-Quarks und der Produktion von Top-Antiquarks statt. Dafür wird der Quotient $R_t = \sigma^t / \sigma^{\bar{t}}$ angegeben. Für kleine transversale Impulse gilt $R_t \approx 1,5$, während $R_t > 2$ für $k_T > 300 \text{ GeV}$ gilt. Dies kann durch die Partonverteilungsfunktionen erklärt werden. Der Anstieg von R_t mit k_T erklärt den geringeren Durchschnittswert für den transversalen Impuls des Top-Antiquarks. Die Korrekturen in NLO modifizieren den Verlauf von R_t leicht. In NLO ist der Anstieg von R_t kleiner als in LO. Die Verteilungen bei einer hadronischen Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$ sind qualitativ ähnlich zu denen bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$. Der durchschnittliche transversale Impuls ist mit 106 GeV für t Produktion und 99 GeV für \bar{t} Produktion um 8 GeV kleiner.

In Tabelle A.7 sind die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration für die differenzielle Verteilung im Intervall $0 < k_T < 625 \text{ GeV}$ für 50 Klassen gleicher Breite angegeben. In der ersten Spalte wird jeweils die untere Grenze der Klassen angegeben. Die Mittelwerte σ und die Unsicherheiten Δ_σ wurden jeweils durch das ungewichtete Mittel aus zehn Einzeliterationen abgeschätzt.

Transversale Impulse der Jets

Für jedes Ereignis werden die Jets nach ihren transversalen Impulsen geordnet. Der höchste transversale Impuls kennzeichnet den ersten Jet. Die Verteilung für den ersten Jet wird in Abb. 4.7 gezeigt. Für kleine k_T wurde eine Klassenbreite von $12,5 \text{ GeV}$ gewählt. Die ersten beiden Klassen verschwinden daher durch den Schnitt $k_T^{\text{min}} = 25 \text{ GeV}$. Im Folgenden

werden Werte für die Top-Antiquark Produktion in Klammern angegeben. Die Bedingung $k_T < 200 \text{ GeV}$ gilt in 89% (91%) der Ereignisse. Die Durchschnittswerte betragen $k_T = 112 \text{ GeV}$ ($k_T = 106 \text{ GeV}$) in NLO und $k_T = 121 \text{ GeV}$ ($k_T = 112 \text{ GeV}$) in LO. Der größere Unterschied der Durchschnittswerte zwischen LO und NLO im Vergleich zum Top-Quark folgt aus dem hohen Wert von K für kleine Werte von k_T . Für die Klasse mit $25 \text{ GeV} < k_T < 37,5 \text{ GeV}$ beträgt die NLO Korrektur ungefähr 70% (50%). In den weiteren Klassen fällt K mit steigendem k_T monoton ab. Die hohen Werte von K für kleine k_T werden durch einen Sudakov-Logarithmus erklärt. Der Logarithmus in k_T wurde in LO in Abb. 2.7a gezeigt. Die Wahl des Schnitts $k_T^{\min} = 25 \text{ GeV}$ war an dieser Stelle willkürlich. In NLO zeigt der Verlauf von K nun, dass für kleine k_T die angewandte Störungstheorie nicht gut konvergiert. Abb. 4.9b zeigt den Wert von K im Bereich $0 < k_T < 625 \text{ GeV}$ für die Summe $(\sigma_{\text{NLO}}^t + \sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}})$. Zur Beschreibung von Ereignissen mit wesentlich größeren Werten von k_T für den ersten Jet ist die verwendete feste Skala nicht mehr geeignet. Analog zum transversalen Impuls des Top-Quarks vergrößert sich der Wirkungsquerschnitt in NLO für $\mu = 2m_t$ statt $\mu = m_t$ bei hohen p_T . Dies führt in einem Übergangsbereich zu einem Verschwinden der Skalenunsicherheit mit der Drei-Punkt-Methode. Der Verlauf des Quotienten R_t ähnelt dem Histogramm für den transversalen Impuls des Top-Quarks.

Die Verteilung für den zweiten Jet wird in Abb. 4.8 gezeigt. Nur in wenigen Ereignissen haben beide Jets einen hohen transversalen Impuls. Der Durchschnittswert liegt bei 56 GeV (55 GeV). Für über 90% der Ereignisse gilt $k_T < 100 \text{ GeV}$. Der Verlauf von K ist im Bereich $25 \text{ GeV} < k_T < 150 \text{ GeV}$ flach. Die Skalenunsicherheit ist gegenüber der führenden Ordnung reduziert. Bei der Skala $\mu = 2m_t$ ist der Wirkungsquerschnitt sowohl in LO als auch in NLO kleiner als bei $\mu = m_t$. In Abb. 4.9c wird ebenfalls der Quotient R_t gezeigt. Der Verlauf von R_t ist flach, für alle Klassen des Histogramms gilt in NLO $1,5 < R_t < 1,8$. Dies erklärt den geringen Unterschied der Durchschnittswerte zwischen dem Fall der t und der \bar{t} Produktion. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration sind in den Tabellen A.8 und A.9 angegeben.

Verteilungen für den dritten Jet werden in Abb. 4.9d gezeigt. Summation über alle Klassen der Verteilung ergibt $\sigma_3^{\text{R}} = \sigma_{\text{NLO}}^{3\text{Jets}}$. Die Durchschnittswerte liegen bei 46 GeV (45 GeV). Der Quotient R_t ist größer als im Histogramm des transversalen Impulses des zweiten Jets.

Rapidity und Pseudorapidity des Top-Quarks

Die Pseudorapidity des Top-Quarks bzw. Top-Antiquarks wird in Abb. 4.10 oben gezeigt. Für alle Klassen der Histogramme gilt $K > 1$. Zwischen den Bändern aus der Skalenvariation in LO und NLO gibt es keinen Überlapp. Ereignisse mit kleinem transversalem Impuls des Top-Quarks können zu allen Klassen der Histogramme beitragen. Dies erklärt die positiven Korrekturen in NLO in allen Klassen. Während die Korrekturen in der zentralen Region ein Minimum haben, wachsen die Korrekturen an den Rändern auf über 50% an. Die Bedingung $|\eta| < 2,7$ gilt für 82,5% (85,6%) der Ereignisse, die Durchschnittswerte von $|\eta|$ sind 1,67 (1,58) in NLO und 1,59 (1,52) in LO. Top-Antiquarks werden daher im Durchschnitt zentraler als Top-Quarks produziert. Diesen Effekt gibt es bereits in der führenden Ordnung.

Die Rapidity des Top-Quarks bzw. des Top-Antiquarks wird in Abb. 4.11 gezeigt. Die Verteilungen von K ähneln denen für die Pseudorapidity. Unterschiede zeigen sich beim

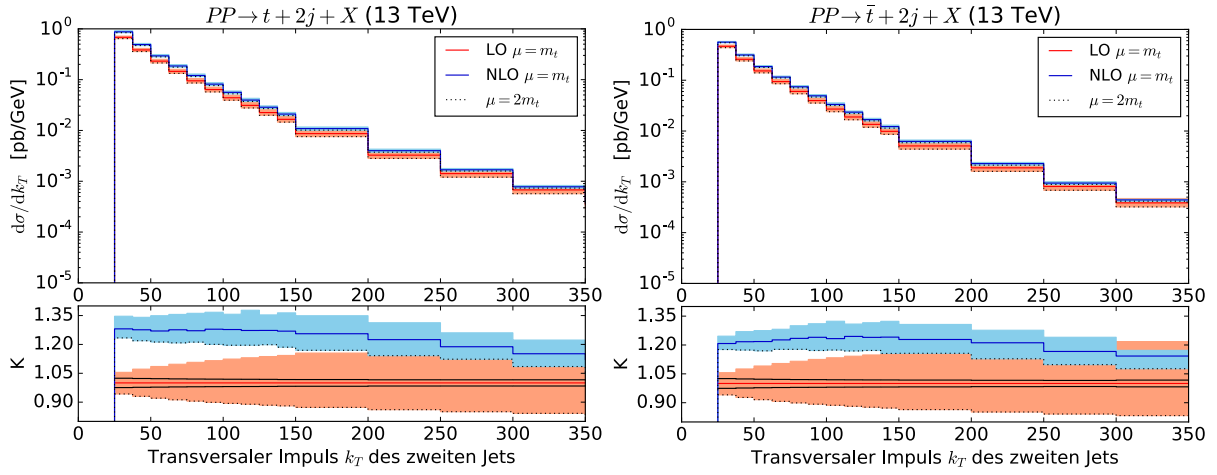
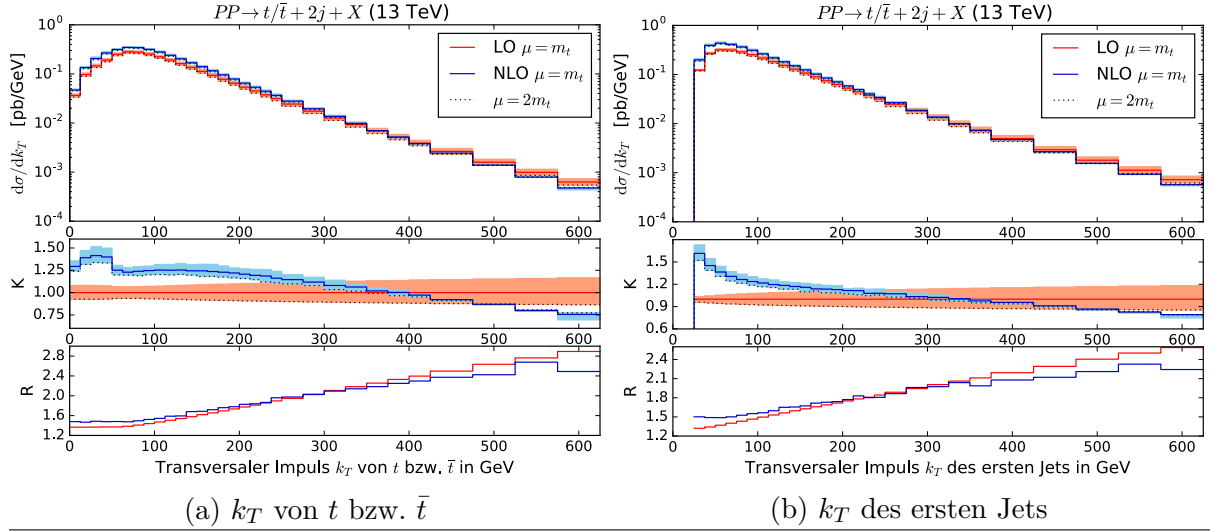
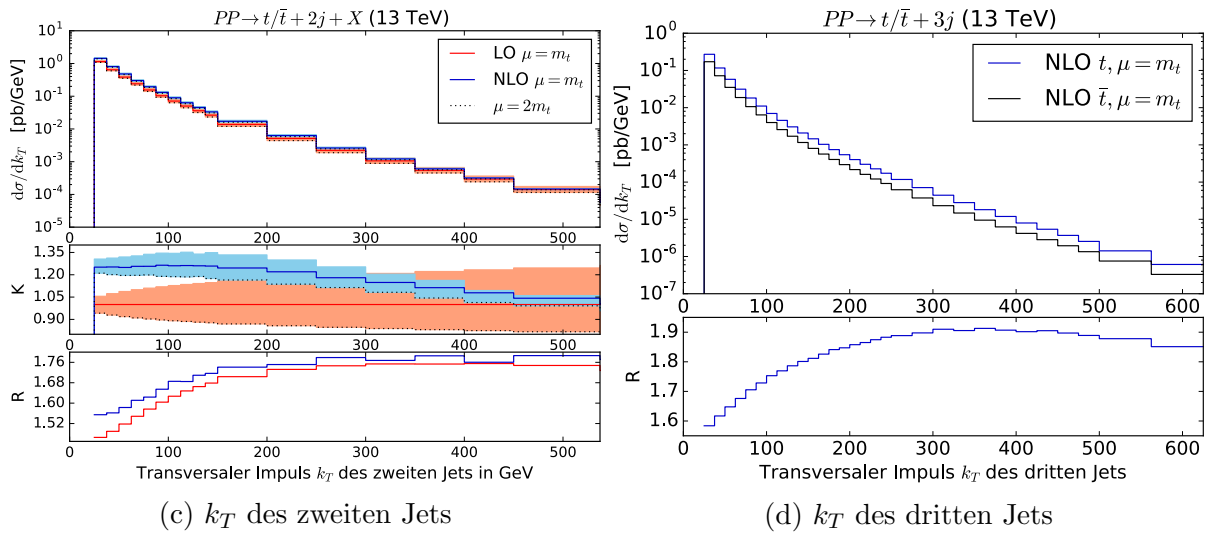


Abbildung 4.8: Transversaler Impuls des zweiten Jets (t Produktion links)



(a) k_T von t bzw. \bar{t}

(b) k_T des ersten Jets



(c) k_T des zweiten Jets

(d) k_T des dritten Jets

Abbildung 4.9: Verteilungen für $\sigma^t + \sigma^{\bar{t}}$, $R_t = \sigma^t/\sigma^{\bar{t}}$

Quotienten R_t in Abb. 4.12 oben. An den Rändern der Verteilung für die Rapidität gilt $R_t > 5$. Die relativen Unsicherheiten aus den Partonverteilungsfunktionen und aus α_s bei der \bar{t} Produktion sind in diesem Bereich ebenso wesentlich größer. In den beiden Klassen am Rand des Histogramms in Abb. 4.11 rechts betragen diese Unsicherheiten ca. 20%. Im Umkehrschluss könnte diese Observable zur Verbesserung der Partonverteilungsfunktionen von Bottom-Quarks beitragen. Die Durchschnittswerte von $|y|$ sind 1,04 (0,94) in NLO und 1,00 (0,91) in LO. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration sind in den Tabellen A.10 und A.11 angegeben.

Pseudorapiditäten der Jets

In Abb. 4.10 werden Verteilungen in den Pseudorapiditäten gezeigt. Der Verlauf von K ist in drei von vier Fällen flach, nur beim ersten Jet der Top-Quark Produktion hat K im zentralen Bereich ein Maximum. Dies führt zur Kompensation des Minimums des differentiellen Wirkungsquerschnitts $d\sigma/d\eta$ in führender Ordnung. Die Verteilungen in NLO sind somit im zentralen Bereich in allen vier Fällen flach. Die beiden Verteilungen für den dritten Jet sind ebenfalls flach und werden nicht gezeigt. Für den zweiten Jet ist der flache Verlauf von K durch die Verteilung im transversalen Impuls im Bereich $25 \text{ GeV} < k_T < 150 \text{ GeV}$ erklärbar. Dieser Bereich trägt dominant zum inklusiven Wirkungsquerschnitt bei und hat einen flachen Verlauf von K . Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration sind in den Tabellen A.12 und A.13 angegeben.

Weitere Observablen

Neben den transversalen Impulsen, den Pseudorapiditäten und den Rapiditäten gibt es weitere mögliche Observablen. In Abb. 4.13 werden Histogramme in $y_{12} = |y_1 - y_2|$ gezeigt. Dabei sind y_1 und y_2 die Rapiditäten des ersten und des zweiten Jets. Der durchschnittliche Wert für diese Differenz liegt bei 1,65 für die t Produktion und bei 1,68 für die \bar{t} Produktion, ebenfalls bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$. Nur in wenigen Ereignissen gibt es große Unterschiede in den Rapiditäten der ersten beiden Jets. Für weniger als 4% der Ereignisse gilt $y_{12} > 4$. Der „Abstand“ zwischen den beiden Jets mit höchstem transversalem Impuls wird in Abb. 4.14 durch ein Histogramm in

$$R_{12} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (\phi_1 - \phi_2)^2}$$

veranschaulicht. Der durchschnittliche Wert beträgt $R \approx 2,6$, sowohl bei der t als auch bei der \bar{t} Produktion und auch bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$. Wegen des Maximums hat die genaue Wahl von R^{min} weniger Einfluss auf den inklusiven Wirkungsquerschnitt als die Wahl von k_T^{min} und η^{max} . Die Bedingung $R < 1,2$ gilt nur für 16% der Ereignisse. In Abb. 4.15 werden Histogramme in der invarianten Masse m_{12} der beiden Jets mit höchstem transversalem Impuls gezeigt. Die Durchschnittswerte liegen bei 217 GeV (212 GeV) bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ bzw. bei 202 GeV (197 GeV) bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$. Der Verlauf von K ist flach. Die Skalenabhängigkeit ist gegenüber der führenden Ordnung reduziert.

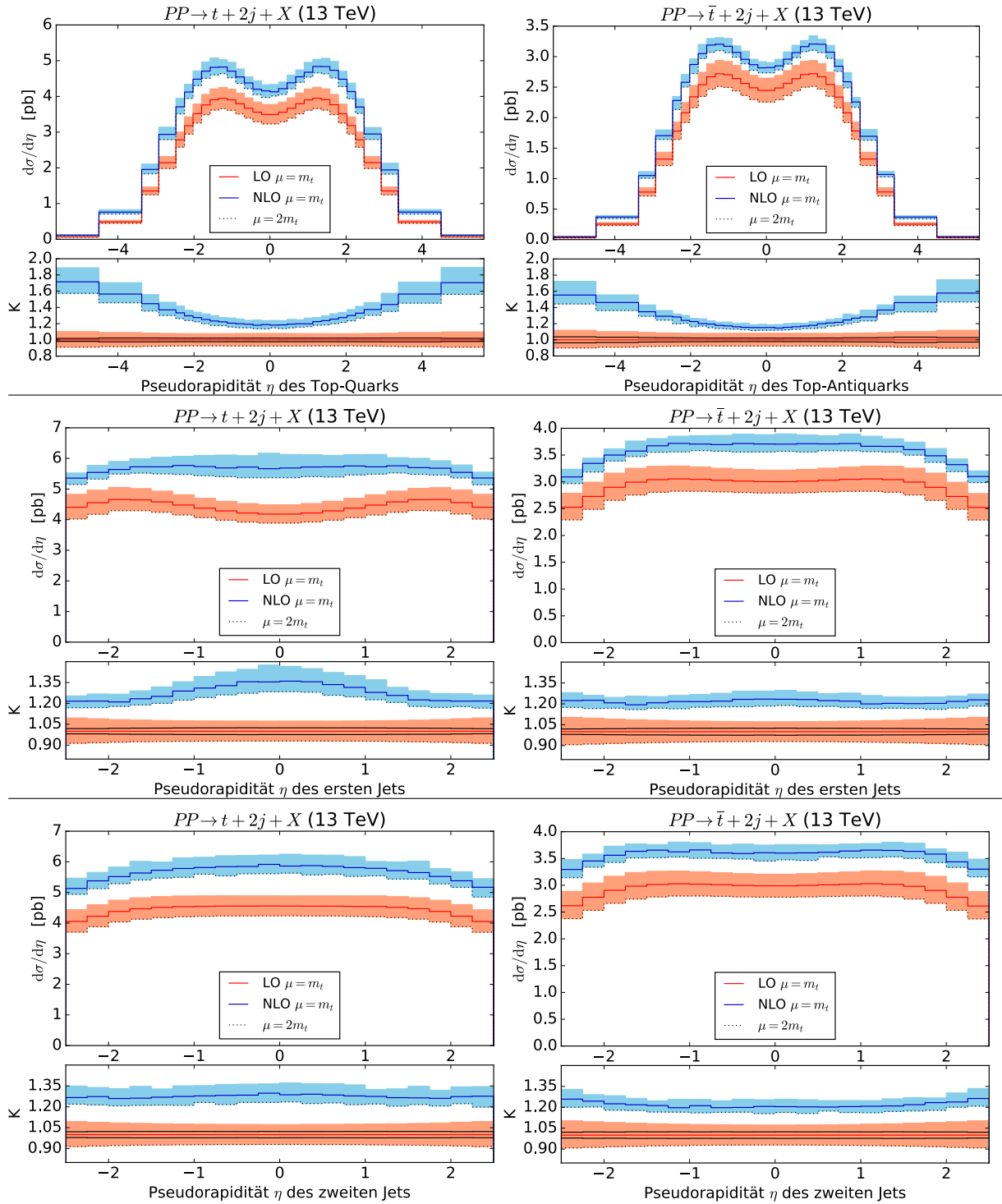


Abbildung 4.10: Verteilungen der Pseudorapidity

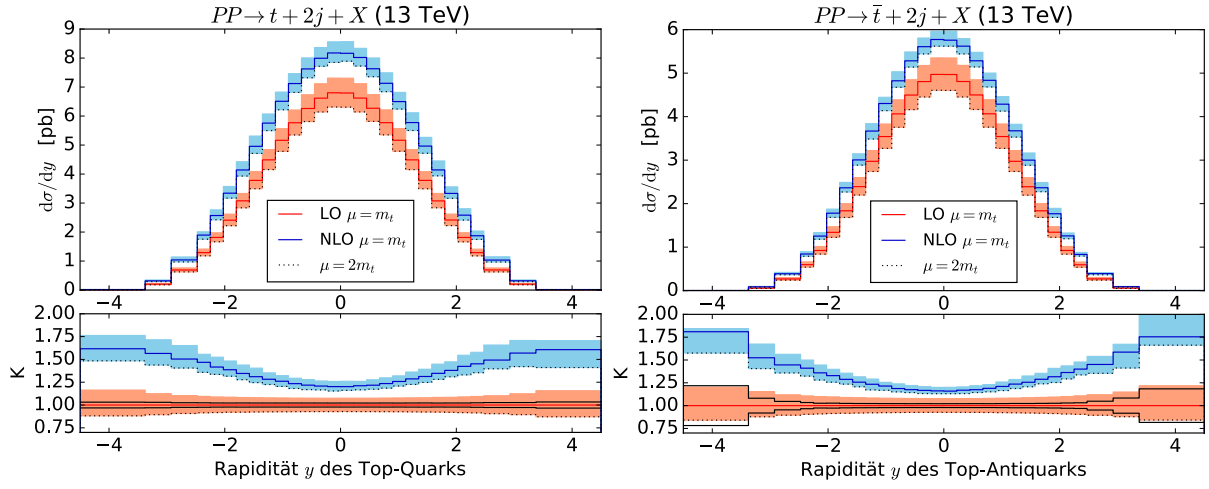


Abbildung 4.11: Verteilungen der Rapidity für t bzw. \bar{t}

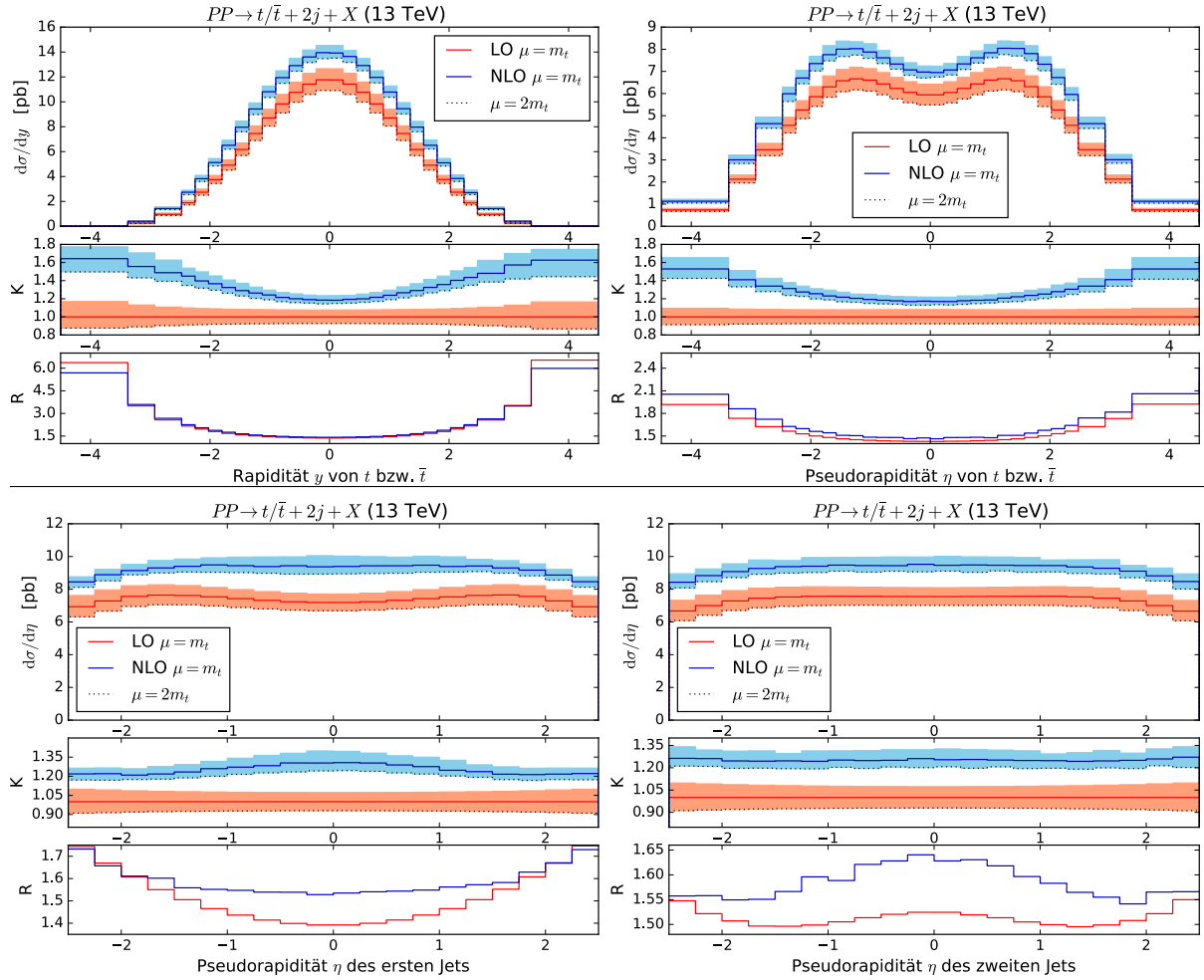


Abbildung 4.12: Verteilungen für $(t + \bar{t})$ mit $R_t = \sigma^t/\sigma^{\bar{t}}$

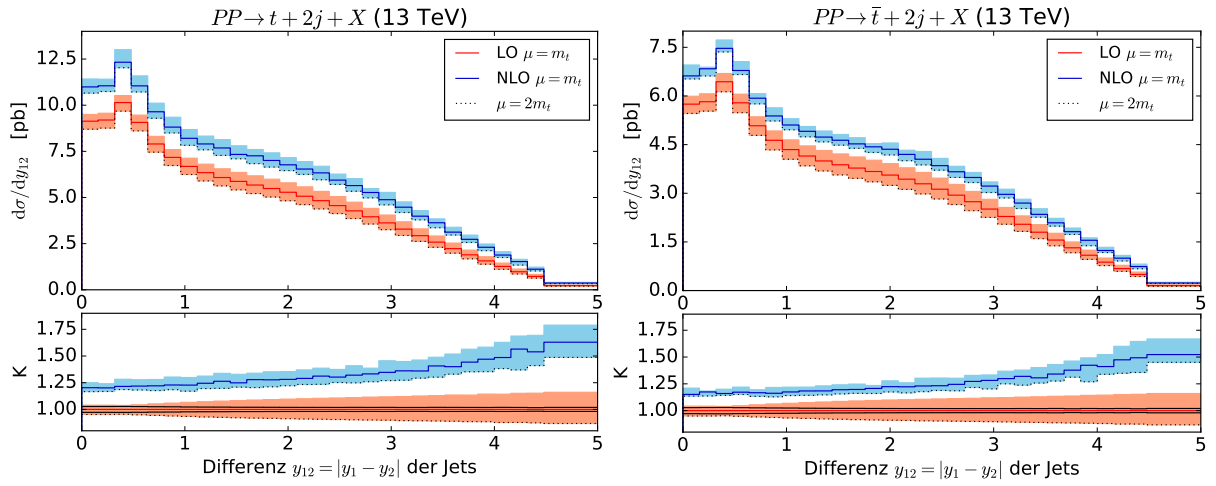


Abbildung 4.13: Unterschied der Rapiditäten der ersten beiden Jets

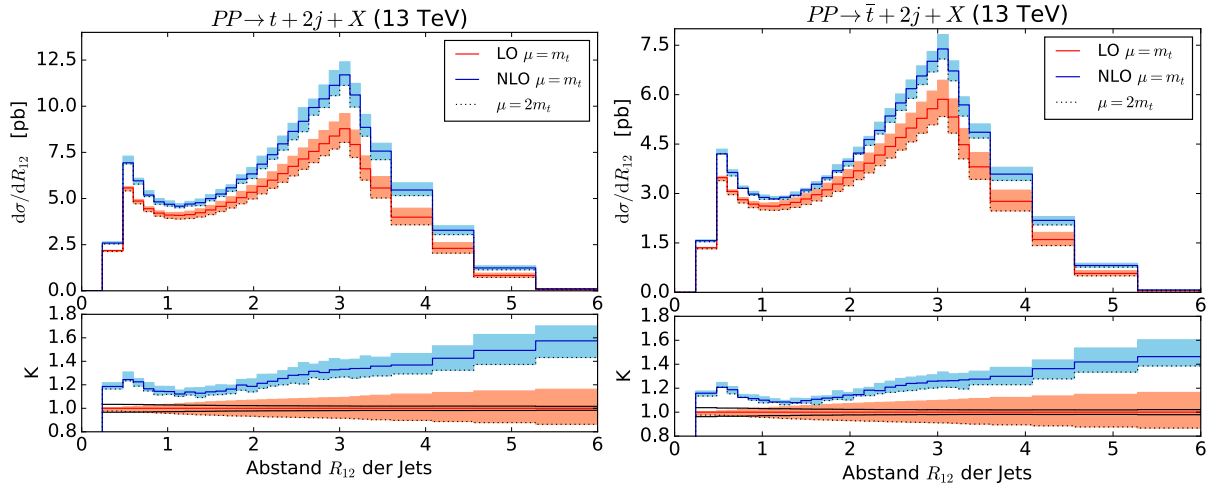


Abbildung 4.14: „Abstand“ R_{12} zwischen den ersten beiden Jets

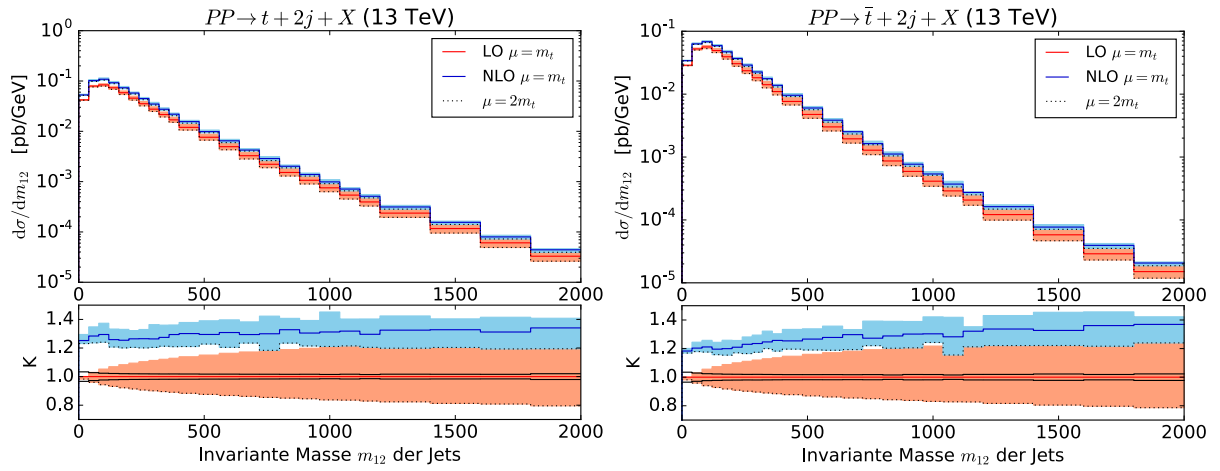


Abbildung 4.15: Invariante Masse der ersten beiden Jets

4.3 Differenzielle Wirkungsquerschnitte mit dynamischen Skalen

Bisher wurde für die Renormierungsskala $\mu_R = m_t$ gewählt. Durch diese Wahl verschwinden Beiträge, die zu $\ln(\mu_R/m_t)$ proportional sind. Bei der Auswertung der Einschleifenintegrale in den virtuellen Korrekturen treten ebenfalls Logarithmen vom Typ $\ln(\mu_R/Q_K)$ auf, wobei Q_K von der Kinematik des Phasenraumpunkts abhängt. Diese Logarithmen zeigen sich in den Abbildungen 4.9a und 4.9b durch einen abnehmenden Wert von K für höhere transversale Impulse. Durch die Wahl einer vom Phasenraumpunkt abhängigen dynamischen Skala

$$\mu_{\text{dyn}} = c_d [m_t + p_T^\Sigma] \quad \text{mit} \quad p_T^\Sigma = p_T^t + \sum_{\text{Partonen}} p_T \quad (4.1)$$

kann auf beide Logarithmen Rücksicht genommen werden. Der Parameter c_d muss dabei so gewählt werden, dass der zugehörige inklusive Wirkungsquerschnitt mit dem Ergebnis bei der festen Skala $\mu = m_t$ verträglich ist. In den reellen Prozessen läuft die Summe über die transversalen Impulse von drei auslaufenden Partonen. In allen Fällen wird der transversale Impuls p_T^t des Top-Quarks oder des Top-Antiquarks für p_T^Σ berücksichtigt. In Tabelle 4.7 werden die Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung für verschiedene Werte von c_d angegeben. Der Wirkungsquerschnitt bei fester Skala $\mu = m_t$ entspricht dabei einem Wert zwischen $c_d = \frac{1}{4}$ und $c_d = \frac{1}{2}$. Werden die transversalen Impulse in Gl. (4.1) durch die entsprechenden Durchschnittswerte aus den Histogrammen ersetzt, so nimmt die eckige Klammer einen Wert von ungefähr 500 GeV an. Der Wert $c_d \approx \frac{1}{3}$ führt daher zu einem ähnlichen inklusiven Wirkungsquerschnitt wie die feste Skala $\mu = m_t$.

Für Histogramme mit dynamischer Skala wurde die zentrale Skala $c_d = \frac{1}{2}$ verwendet. In Tabelle A.6 werden numerische Teilergebnisse für die Top-Quark Produktion und die Top-Antiquark Produktion angegeben. Zur Bestimmung der Unsicherheit aus der Skalenvariation wurden darüber hinaus Wirkungsquerschnitte für $c_d = \frac{1}{4}$ und $c_d = 1$ berechnet. Das Endergebnis für den inklusiven Wirkungsquerschnitt mit den Unsicherheiten aus der Skalenvariation wird in Tabelle 4.8 angegeben. Der Wert von $\sigma_{\text{NLO}}^{t+\bar{t}} = 44,4 \text{ pb}$ liegt innerhalb der durch Skalenvariation abgeschätzten Unsicherheit für den inklusiven Wirkungsquerschnitt bei fester zentraler Skala $\mu = m_t$. Diese Aussage gilt ebenfalls für σ_{NLO}^t und $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$. Es wird geschlussfolgert, dass $c_d = \frac{1}{2}$ eine geeignete Wahl für den Parameter c_d der dynamischen Skala ist.

Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration für $d\sigma/dk_T$ im Intervall $0 < k_T < 1 \text{ TeV}$ werden in den Tabellen A.14 und A.15 angegeben. In Abb. 4.16b wird die Verteilung für den transversalen Impuls des Top-Quarks im Intervall $k_T \in [0, 1000 \text{ GeV}]$ mit dynamischer Skala gezeigt. Zum Vergleich wird in Abb. 4.16a ein Histogramm mit gleicher Wahl der Klassen für die feste Skala $\mu = m_t$ gezeigt. Bei fester Skala überlappen sich die Bänder aus der Skalenvariation in LO und NLO nur für transversale Impulse $k_T \approx 400 \text{ GeV}$. In der Klasse mit größtem k_T gilt $K < 0,5$. Bei der dynamischen Skala liegt das Band aus der Skalenvariation in NLO für $k_T > 400 \text{ GeV}$ im Band aus der Skalenvariation in LO. Dem entspricht ein Wert von K nahe 1. Darüber hinaus ist die Skalenvariation in NLO in diesem Bereich klein gegenüber der Skalenvariation in LO. Insgesamt lässt sich eine deutliche Verbesserung der störungstheoretischen Beschreibung für hohe transversale Impulse des Top-Quarks feststellen. Dies gilt analog für den Fall der Top-Antiquark Produktion

c_d	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\mu = m_t$
σ_{LO}^t [pb]	18,38	19,83	21,40	23,06	24,74	26,26	22,20
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	12,12	13,12	14,20	15,34	16,49	17,56	14,67

Tabelle 4.7: Wirkungsquerschnitte bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13$ TeV in LO mit dynamischer Skala im Vergleich zur festen Skala

σ_{LO}	[pb]		[pb]	σ_{NLO}	[pb]		[pb]	K
σ_{LO}^t	21,4	+7,7% -7,3%	+1,7 -1,6	σ_{NLO}^t	27,1	+4,7% -3,9%	+1,3 -1,1	1,27
$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$	14,2	+8,0% -7,6%	+1,1 -1,1	$\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$	17,2	+3,4% -3,1%	+0,6 -0,5	1,21
$\sigma_{\text{LO}}^{t+\bar{t}}$	35,6	+7,9% -7,4%	+2,8 -2,6	$\sigma_{\text{NLO}}^{t+\bar{t}}$	44,4	+4,2% -3,6%	+1,9 -1,6	1,25

Tabelle 4.8: Inklusiver Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13$ TeV und dynamischer Skala mit Skalenunsicherheiten bei Anwendung der Drei-Punkt-Methode

in Abb.4.16d und für die Summe in Abb.4.17b. Die Unsicherheiten aus den Partonverteilungsfunktionen und aus α_s sind in den Histogrammen für die feste Skala durch schwarze Linien eingezeichnet. Bei dynamischer Wahl der Skala sind diese Unsicherheiten in einigen Klassen nicht mehr gegenüber der Unsicherheit aus der Skalenvariation vernachlässigbar. In Abb. 4.18 werden Histogramme für den transversalen Impuls des ersten Jets gezeigt. Insbesondere für den Fall der Produktion von Top-Quarks ist eine deutliche Verbesserung der störungstheoretischen Beschreibung erkennbar. Bei dynamischer Skala überlappen sich für $k_T > 200$ GeV in beiden Fällen, t und \bar{t} Produktion, die Bänder aus der Skalenvariation in LO und NLO.

Zum Abschluss werden die aus den Histogrammen folgenden Durchschnittswerte betrachtet. Für den transversalen Impuls des Top-Quarks ist dieser $k_T = 114$ GeV für σ_{NLO}^t und $k_T = 107$ GeV für $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$. Für den transversalen Impuls des ersten Jets gilt im Durchschnitt $k_T = 112$ GeV für σ_{NLO}^t und $k_T = 106$ GeV für $\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$. Diese Werte liegen sehr Nahe an denen der festen Skala. In führender Ordnung gibt es hingegen Abweichungen von bis zu 3 GeV. Dies entspricht den Erwartungen, da die nächstführende Ordnung schwächer als die führende Ordnung durch die Skalenwahl beeinflusst werden sollte. Insgesamt wird festgestellt, dass die dynamische Skala zu einer Verbesserung der störungstheoretischen Beschreibung von Top-Quarks und Jets mit hohen transversalen Impulsen führt.

Anmerkung zum Vergleich mit anderen Arbeiten

Im Mai 2018 wurde eine Arbeit zur Erzeugung einzelner Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets in NLO QCD veröffentlicht [82], in welcher zusätzlich „Parton-Shower“ (PS) berücksichtigt werden. Weiterhin wurde die MINLO Methode [83] verwendet, bei welcher Sudakov-Logarithmen resummiert werden. Eine Implementierung in die POWHEG BOX [84] wurde angekündigt, ist gegenwärtig jedoch noch nicht verfügbar. Ein quantitativer Vergleich der in einer Abbildung gezeigten inklusiven Wirkungsquerschnitte ist wegen der PS nicht möglich.

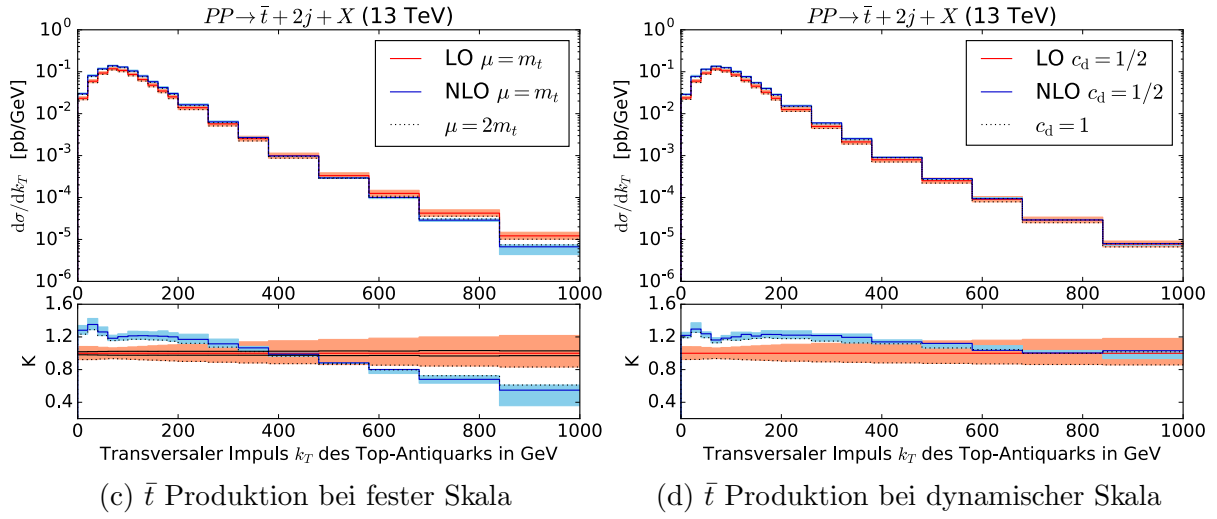
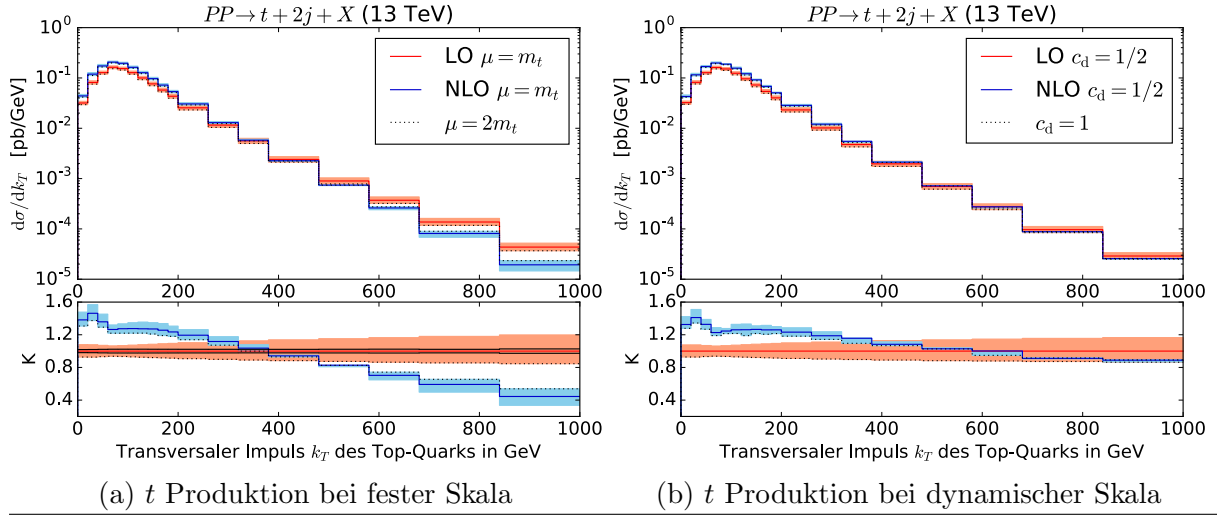


Abbildung 4.16: Histogramme für den transversalen Impuls des Top-Antiquarks

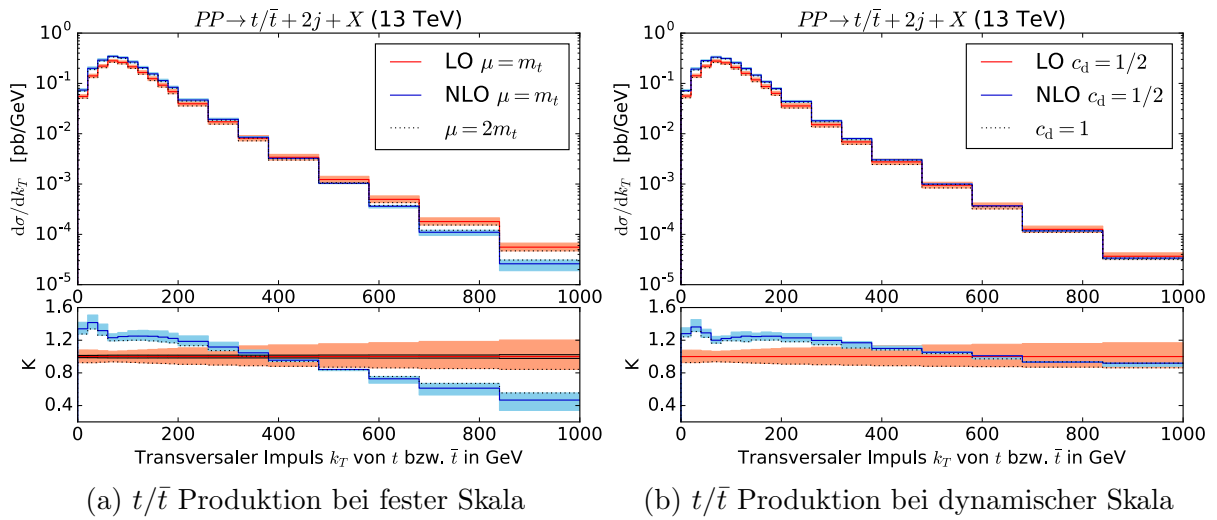


Abbildung 4.17: Histogramme für den transversalen Impuls des Top-Quarks bzw. des Top-Antiquarks

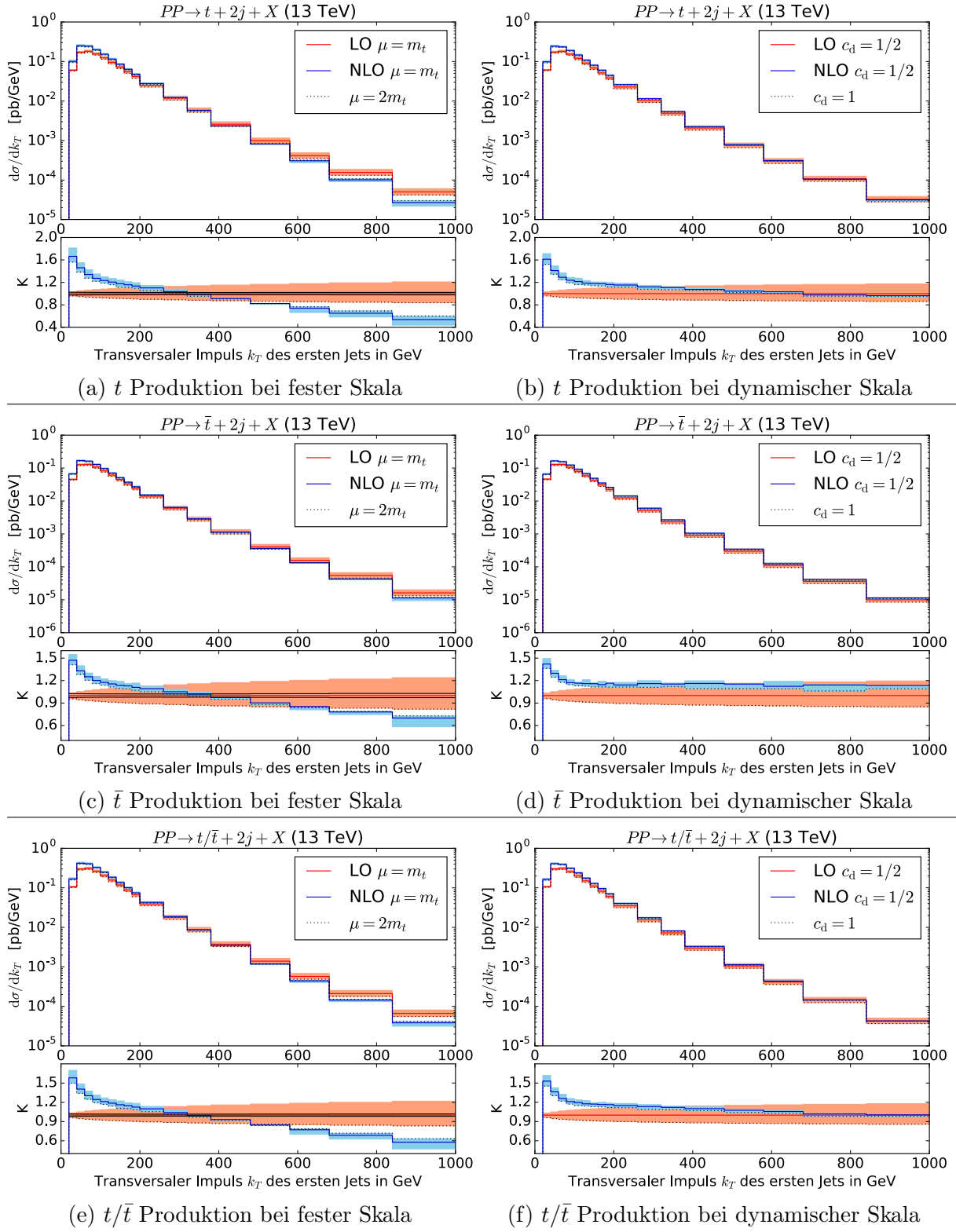


Abbildung 4.18: Histogramme für den transversalen Impuls des ersten Jets

5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die nächstführenden QCD Korrekturen zur Produktion von Top-Quarks in Assoziation mit zwei Jets berechnet. Die Produktion von Top-Antiquarks in Assoziation mit zwei Jets wurde durch Ausnutzung von CP-Invarianz berechnet. Den zum Teil identischen Endzuständen der Produktion von einzelnen Top-Quarks in Assoziation mit einem W -Boson nach dem Zerfall des W -Bosons wurde durch Entfernung resonanter Diagramme Rechnung getragen. Der dominante Anteil der entsprechenden Beiträge ist der tW -Produktion zuzuordnen. Von der Top-Quark Paarproduktion wurde ebenfalls eine Abgrenzung vorgenommen.

Für den inklusiven Wirkungsquerschnitt mit Schnitten $k_T^{\min} = 25 \text{ GeV}$ und $\eta^{\max} = 2,5$ an die Jets wurde bei einer hadronischen Schwerpunktsenergie von 13 TeV und der Wahl $\mu = m_t$ für die zentrale Skala im Fall der Produktion von Top-Quarks

$$\sigma_{\text{NLO}}^t = 28,3^{+5,8\%}_{-4,5\%} \text{ pb mit } K = \sigma_{\text{NLO}}^t / \sigma_{\text{LO}}^t = 1,28$$

und im Fall der Produktion von Top-Antiquarks

$$\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}} = 17,9^{+4,1\%}_{-3,8\%} \text{ pb mit } K = \sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}} / \sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}} = 1,22$$

gefunden. Die angegebenen relativen Unsicherheiten stammen aus der Variation der Skalen nach der Sieben-Punkt-Methode. Die Skalenunsicherheit wird zu großen Teilen durch reelle Korrekturen mit drei Jets neben dem Top-Quark bzw. Top-Antiquark verursacht. Durch die Größe dieses Beitrags gibt es keine Überschneidung zwischen den Bändern aus der Skalenvariation in führender und in nächstführender Ordnung.

Für die Verteilungen in den Pseudorapiditäten der Jets wurde in NLO ein flacher Verlauf im durch η^{\max} erlaubten Bereich gefunden. Für Pseudorapiditäten $|\eta_{t/\bar{t}}| > 4$ betragen die Korrekturen über 50%. Top-Antiquarks werden im Durchschnitt zentraler produziert als Top-Quarks, diesen Effekt gibt es bereits in der führenden Ordnung. Die Verteilung des transversalen Impulses des zweiten Jets hat für die feste Wahl der Skala einen flachen Verlauf von K . Für die transversalen Impulse des Top-Quarks und des ersten Jets wurde durch eine dynamische Skala ein flacher Verlauf von K mit Überschneidung der Bänder aus der Skalenversion oberhalb von $k_T \approx 400 \text{ GeV}$ gefunden.

In den virtuellen Korrekturen tritt ein Beitrag mit Farbaustausch zwischen den Quark-Linien auf. Mit 0,02 pb liegt dieser Beitrag im Subpromille-Bereich. Weiterhin findet eine Kürzung dieses Beitrags mit dem zugehörigen Gegenstück in den reellen Korrekturen statt. Dies bestätigt die in anderen Arbeiten vorgenommene Näherung mit Vernachlässigung von durch die Farbalgebra unterdrückten Beiträgen.

Als Ausblick bietet sich die Berücksichtigung des Zerfalls des Top-Quarks an. Weiterhin kann die implementierte Rechnung als Startpunkt zur Berechnung der Anteile σ_{RV} und σ_{RR} von σ_{NNLO} , dem Wirkungsquerschnitt in übernächstführender Ordnung der QCD, für die Produktion einzelner Top-Quarks genutzt werden. Mit Kenntnis der Zweischleifen-Integrale in σ_{VV} wäre dann die Berechnung von σ_{NNLO} zur Erzeugung einzelner Top-Quarks ohne Näherung in der Farbalgebra möglich.

A Anhang

A.1 Konventionen und Abkürzungen

Es werden Natürliche Einheiten mit $\hbar = c = 1$ und die Metrik

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit Lorentz-Indices } \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

verwendet. Für ein Elektron mit Viererimpuls p und Masse m_e gilt dann $p^2 = p^\mu p_\mu = m_e^2$. Für Lorentz-Indices und Farbindices (A.2) wird im Allgemeinen die Einsteinsche Summenkonvention angewandt. In der Dirac-Gleichung im Impulsraum

$$(\not{p} - m_e I_4)u(p) = 0 \text{ mit } \not{p} = \gamma^\mu p_\mu$$

mit dem Spinor $u(p)$ des Elektrons treten Dirac-Matrizen γ^μ mit der Eigenschaft

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_4 \text{ (Dirac-Algebra)}$$

auf. Die Eigenschaft $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ der adjungierten Dirac-Matrizen motiviert die Definition $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$. Mit $\gamma_5 := i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ lassen sich Projektoren $P_L = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5)$ und $P_R = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5)$ für den Anteil eines Spinors mit linkshändiger bzw. rechtshändiger Chiralität definieren.

Abkürzungen

CKM-Matrix:	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix
IR-Divergenz:	Infrarot-Divergenz
LHC:	Large Hadron Collider
LO:	führende Ordnung
NLO:	nächstführende Ordnung
QCD:	Quantenchromodynamik
SM:	Standardmodell der Elementarteilchenphysik
UV-Divergenz	Ultraviolett-Divergenz

A.2 Farbalgebra der QCD

Es wird die spezielle unitäre Gruppe, $SU(N_C)$, betrachtet. Diese besteht aus komplexen $N_C \times N_C$ Matrizen U mit den Eigenschaften $U^\dagger U = I_{N_C}$ und $\det(U) = 1$. Die Matrizen

U beschreiben Transformationen. Infinitesimal gilt mit reellen Parametern α^a

$$U = I_{N_C} + i\alpha^a T^a + O(\alpha^2).$$

Die Generatoren genannten Matrizen T^a mit $a \in \{1, \dots, N_A = N_C^2 - 1\}$ bilden zusammen mit der Einheitsmatrix eine Basis der Matrizen U . Die Generatoren haben auf der Diagonalen $(N_C - 1)$ unabhängige reelle Elemente. Außerhalb der Diagonalen gibt es $(N_C - 1)N_C/2$ unabhängige komplexe Elemente, also $(N_C^2 - N_C)$ unabhängige reelle. In der Summe gibt es daher $N_A = (N_C^2 - 1)$ Generatoren. Für die Normierung

$$\text{Sp}(T^a T^b) = T_f \delta_{ab}$$

wird die Konstante T_f eingeführt. Für die Generatoren gilt

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= (I_{N_C} - i\alpha^a (T^a)^\dagger)(I_{N_C} + i\alpha^b T^b) = I_{N_C} + i\alpha^c (T^c - (T^c)^\dagger) + O(\alpha^2) \implies (T^c)^\dagger = T^c, \\ 1 &= \det(U) = \det(e^{i\alpha^a T^a}) = e^{i\alpha^a \text{Sp}(T^a)} = 1 + i\alpha^a \text{Sp}(T^a) + O(\alpha^2) \implies \text{Sp}(T^c) = 0, \end{aligned}$$

Hermitizität und Spurlosigkeit.

Da die Generatoren eine Basis bilden, muss sich ihr Kommutator wiederum als Linearkombination von Generatoren ausdrücken lassen. Diese Linearkombinationen werden durch die Strukturkonstanten f^{abc} mit

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$$

beschrieben. Unter Verwendung von fundamentalen Farbindices (im Unterschied zu den adjungierten Farbindices a, b, c) ist dies äquivalent zu

$$T_{ij}^a T_{jk}^b - T_{ij}^b T_{jk}^a = if^{abc} T_{ik}^c.$$

Summation über adjungierte Farbindices

Zur Auswertung von in der QCD auftretenden Farbstrukturen wird die wichtige Identität

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = T_f \left[\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N_C} \delta_{ij} \delta_{kl} \right]$$

benötigt. Beweis: Es sei M eine beliebige hermitesche $N_C \times N_C$ Matrix. Es existiert eine Darstellung

$$M = I_{N_C} x_0 + x^a T^a,$$

da die Einheitsmatrix und die Generatoren eine Basis der hermiteschen Matrizen bilden. Wegen $\text{Sp}(M) = N_C x_0$ und $\text{Sp}(MT^b) = T_f x^b$ folgt

$$M = \frac{\text{Sp}(M)}{N_C} I_{N_C} + \frac{\text{Sp}(MT^a)}{T_f} T^a.$$

Es werden nun N_C^2 Matrizen M^{lk} über

$$(M^{lk})_{ij} = \delta_{il} \delta_{kj}$$

definiert. Einsetzen in die vorherige Gleichung,

$$\delta_{il} \delta_{kj} = \frac{1}{N_C} \delta_{lk} \delta_{ij} + \frac{1}{T_f} T_{kl}^a T_{ij}^a,$$

schließt den Beweis nach Umstellen nach $T_{ij}^a T_{kl}^a$ ab.

Algorithmus zur Auswertung von Farbstrukturen

- Elimination der Strukturkonstanten:

$$f^{abc} = \frac{-i}{T_f} \cdot \text{Sp}(T^a T^b T^c - T^a T^c T^b)$$

- Summation über adjungierte Farbindices:

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = T_f \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N_C} \delta_{ij} \delta_{kl} \right]$$

- Ausnutzen der Normierung und der Spurfreiheit:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(T^a T^b) &= T_f \delta_{ab} \\ \text{Sp}(T^a) &= 0 \end{aligned}$$

Benötigte Identitäten

$$\begin{aligned} \text{Sp}(T^a T^a) &= C_F N_C \\ \text{Sp}(T^a T^b) \text{Sp}(T^a T^b) &= T_{ij}^a T_{ji}^b T_{kl}^a T_{lk}^b = T_f T_{ji}^b T_{lk}^b \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N_C} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] = T_f C_F N_C \\ \text{Sp}(T^a T^b T^a T^b) &= T_{ij}^a T_{jk}^b T_{kl}^a T_{li}^b = T_f T_{jk}^b T_{li}^b \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N_C} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] = -C_F T_f \\ \text{Sp}(T^a T^a T^b T^b) &= T_{ij}^a T_{jk}^a T_{kl}^b T_{li}^b = C_F \text{Sp}(T^a T^a) = N_C C_F^2 \\ \text{Sp}(T^a T^b T^c) f^{abc} &= 6i \end{aligned}$$

Farbalgebra für die Born-Amplitude:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{du}^g \delta_{bt}) = (T_{ud}^g \delta_{tb}) (T_{du}^g \delta_{bt}) = \text{Sp}(T^g T^g) N_C = N_C^2 C_F \\ C_{12} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{tb}^g \delta_{ud}) = \text{Sp}(T^g) \text{Sp}(T^g) = 0 \\ C_{21} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{du}^g \delta_{bt}) = \text{Sp}(T^g) \text{Sp}(T^g) = 0 \\ C_{22} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{tb}^g \delta_{ud}) = (T_{bt}^g \delta_{ud}) (T_{tb}^g \delta_{ud}) = \text{Sp}(T^g T^g) N_C = N_C^2 C_F \end{aligned}$$

In den **virtuellen Korrekturen** tritt zusätzlich auf:

$$\begin{aligned} C_{13} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{db}^g \delta_{ut}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F \\ C_{14} &= (T_{du}^g \delta_{tb})^* (T_{tu}^g \delta_{db}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F \\ C_{23} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{db}^g \delta_{ut}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F \\ C_{24} &= (T_{tb}^g \delta_{ud})^* (T_{tu}^g \delta_{db}) = \text{Sp}(T^g T^g) = N_C C_F \end{aligned}$$

Farbkorrelierte Matrixelemente:

Farbmatrizen sind wegen ihrer Definition unitär, $C^\dagger = C$. In allen Fällen gilt daher

$C_{21} = C_{12}^*$. Zu Beginn die Fälle mit einem Quark aus der leichten und einem aus der schweren Quark-Linie:

$$\begin{aligned} C_{11}^{ub} &= \delta_{bt} T_{ud}^g T_{u\bar{u}}^n T_{b\bar{b}}^n \delta_{bt} T_{du}^g = 0 \\ C_{22}^{ub} &= \delta_{ud} T_{bt}^g T_{u\bar{u}}^n T_{b\bar{b}}^n \delta_{ud} T_{tb}^g = 0 \\ C_{12}^{ub} &= \delta_{bt} T_{ud}^g T_{u\bar{u}}^n T_{b\bar{b}}^n \delta_{ud} T_{tb}^g = \text{Sp}(T^n T^g) \text{Sp}(T^n T^g) = T_f C_F N_C \end{aligned}$$

Der Austausch ($u \leftrightarrow d$) oder ($b \leftrightarrow t$) erzeugt jeweils ein Minuszeichen. Ergebnis in Matrixnotation:

$$C^{ub} = C^{td} = -C^{ut} = -C^{db} = T_f C_F N_C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beide Quarks aus der leichten Quark-Linie:

$$\begin{aligned} C_{11}^{ud} &= -\delta_{bt} T_{ud}^g T_{u\bar{u}}^n T_{d\bar{d}}^n \delta_{bt} T_{du}^g = -N_C \text{Sp}(T^g T^n T^g T^n) = -N_C T_f C_F \\ C_{22}^{ud} &= -\delta_{ud} T_{bt}^g T_{u\bar{u}}^n T_{d\bar{d}}^n \delta_{ud} T_{tb}^g = \text{Sp}(T^g T^g) \text{Sp}(T^n T^n) = C_F^2 N_C^2 \\ C_{12}^{ud} &= -\delta_{bt} T_{ud}^g T_{u\bar{u}}^n T_{d\bar{d}}^n \delta_{ud} T_{tb}^g = 0 \end{aligned}$$

Beide Quarks aus der schweren Quark-Linie:

$$\begin{aligned} C_{11}^{bt} &= -\delta_{bt} T_{ud}^g T_{b\bar{b}}^n T_{t\bar{t}}^n \delta_{bt} T_{du}^g = \text{Sp}(T^g T^g) \text{Sp}(T^n T^n) = C_F^2 N_C^2 \\ C_{22}^{bt} &= -\delta_{ud} T_{bt}^g T_{b\bar{b}}^n T_{t\bar{t}}^n \delta_{ud} T_{tb}^g = -N_C \text{Sp}(T^g T^n T^g T^n) = -N_C T_f C_F \\ C_{12}^{bt} &= -\delta_{bt} T_{ud}^g T_{u\bar{u}}^n T_{d\bar{d}}^n \delta_{ud} T_{tb}^g = 0 \end{aligned}$$

Gluon und ein Quark aus der leichten Quark-Linie:

$$\begin{aligned} C_{11}^{ug} &= -i\delta_{bt} T_{ud}^{\bar{g}} T_{u\bar{u}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{bt} T_{du}^g = -iN_C \text{Sp}(T^{\bar{g}} T^g T^n) f^{\bar{g}ng} = -6N_C \\ C_{11}^{dg} &= i\delta_{bt} T_{ud}^{\bar{g}} T_{d\bar{d}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{bt} T_{du}^g = iN_C \text{Sp}(T^{\bar{g}} T^n T^g) f^{\bar{g}ng} = -6N_C \\ C_{22}^{ug} &= -i\delta_{ud} T_{bt}^{\bar{g}} T_{u\bar{u}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{ud} T_{tb}^g = 0 \\ C_{12}^{ug} &= -i\delta_{bt} T_{ud}^{\bar{g}} T_{u\bar{u}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{ud} T_{tb}^g = 0 \end{aligned}$$

Gluon und ein Quark aus der schweren Quark-Linie:

$$\begin{aligned} C_{11}^{bg} &= -i\delta_{bt} T_{ud}^{\bar{g}} T_{b\bar{b}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{bt} T_{du}^g = 0 \\ C_{22}^{bg} &= -i\delta_{ud} T_{bt}^{\bar{g}} T_{b\bar{b}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{ud} T_{tb}^g = -iN_C \text{Sp}(T^{\bar{g}} T^g T^n) f^{\bar{g}ng} = -6N_C \\ C_{22}^{tg} &= i\delta_{ud} T_{bt}^{\bar{g}} T_{t\bar{t}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{ud} T_{tb}^g = iN_C \text{Sp}(T^{\bar{g}} T^n T^g) f^{\bar{g}ng} = -6N_C \\ C_{12}^{bg} &= -i\delta_{bt} T_{ud}^{\bar{g}} T_{b\bar{b}}^n f^{\bar{g}ng} \delta_{ud} T_{tb}^g = 0 \end{aligned}$$

A.3 Details zur Implementierung

QGRAF

Mit dem Programm QGRAF [56] wurden alle Diagramme der Einschleifen-Amplitude des Prozesses $u + b \rightarrow d + t + g$ automatisch erzeugt. Dafür werden zunächst alle auftretenden Propagatoren und Vertices mit folgender Datei ('model.qgr') definiert:


```

% propagators
[gluon , gluon , +]
[b , bbar , -]
[t , tbar , -]
[qup , qupbar , -]
[qdown , qdownbar , -]
[ghost , antighost , -]
[Wplus , Wminus , +]
% vertices
[gluon , gluon , gluon]
[gluon , gluon , gluon , gluon]
[antighost , ghost , gluon]
[bbar , b , gluon]
[tbar , t , gluon]
[qupbar , qup , gluon]
[qdownbar , qdown , gluon]
[tbar , b , Wplus]
[bbar , t , Wminus]
[qdownbar , qup , Wminus]
[qupbar , qdown , Wplus]

```

Durch die Angabe der Propagatoren wurden Gluonen sowie die W^+ - und W^- -Bosonen als kommutierend definiert (+). Gluon Geister sowie die Quarks b , t , u und d sind als antikommutierend definiert (-). Die Diagramme werden dann durch folgende Anweisungen erzeugt:

```

output= 'ta.dat' ;
style= 'sum1.sty' ;
model= 'model.qgr' ;
in= qup , b ;
out= qdown , t , gluon ;
loops= 1;
loop_momentum= k;
options= onshell , nosnail ;
true = iprop [ Wplus , 1 , 1 ] ;

```

Diese Anweisungen erzeugen alle Diagramme des Prozesses $u + b \rightarrow d + t + g$ mit genau einer Schleife und genau einem W -Propagator. Die Option „onshell“ legt die ein- und die auslaufenden Teilchen auf die Massenschale. Die Option „nosnail“ lässt alle Diagramme mit Schleifen mit genau einem Propagator und genau einem Vierervertex weg.

Bibliothek zur Berechnung der Tensorintegrale

Es werden zwei Skalen μ und Q eingeführt und Symbole Δ_1 und Δ_2 verwendet, um die Pole zu behandeln.

$$\Delta_1 = \frac{\Gamma(1 + \epsilon)}{\epsilon} \frac{(4\pi\mu^2)^\epsilon}{Q^2} \text{ und } \Delta_2 = \frac{\Delta_1}{\epsilon}$$

Für Tensorintegrale mit zwei oder drei Propagatoren werden die Koeffizienten der Passarino-Veltman Reduktion numerisch ausgerechnet. Die Impulstopologien werden in der

Form $B(p_1^2, m_0^2, m_1^2)$ und $C(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$ angegeben. Beispiel:

```
PVcoeffs.lookup(Dptr[5], - 2*t15, 0, 0);
PVcoeffs.lookup(Dptr[6], - 2*t13, - 2*t23 - 2*t13 + 2*t12, 0, 0, mt2, 0);
t11973 = Dptr[5][B1]; t839 = Dptr[6][C11];
```

Für Tensorintegrale mit vier oder fünf Propagatoren werden skalare Integrale in höherer Dimension numerisch berechnet. Die Impulstopologie wird mit $T_{ij} = (q_i - q_j)^2 - m_i^2 - m_j^2$ durch

$$D(T_{01}, T_{02}, T_{03}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, m_0^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) \\ E(T_{01}, T_{02}, T_{03}, T_{04}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{23}, T_{24}, T_{34}, m_0^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2)$$

angegeben. Beispiel:

```
DP[1] = D_mom(0, -2*t23-2*t13+2*t12, 0, 0, -2*t13, 2*t12, 0, 0, mw2, 0);
EP[2] = E_mom(0, 0, 2*t35-2*t25-2*t23-2*t15-2*t13+2*t12, 0, -2*t13,
-2*t25, 0, -2*t25-2*t15+2*t12, 2*t12, -2*t23-2*t13+2*t12, 0, 0, mw2, 0, 0);
box(E1, DP[1]); pentagon(E2, EP[2]);
t140 = Int(6, 1, 1, 2, 1, E1); t399 = Int(8, 1, 2, 1, 1, 2, E2);
```

Einbinden von QCDLoop

QCDLoop [59] verwendet die Normierung

$$I_{1, \text{QCDLoop}}^D(m_1^2) = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^{\frac{D}{2}} r_\Gamma} \int \frac{d^D l}{l^2 - m_1^2 + i0} \text{ mit } r_\Gamma = \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}$$

und erlaubt die getrennte Berechnung

$$I_{N, \text{QCDLoop}}^D = \frac{a_{-2}}{\epsilon^2} + \frac{a_{-1}}{\epsilon} + a_0 + O(\epsilon)$$

des endlichen Anteils a_0 und der Pole a_{-1} und a_{-2} . Die Umrechnung in die Konvention

$$I_1 = \frac{(2\pi\mu)^{2\epsilon}}{i\pi^2} \int \frac{d^D l}{l^2 - m_1^2 + i0} = r_\Gamma (4\pi)^\epsilon I_{1, \text{QCDLoop}}^D \\ = (4\pi)^\epsilon r_\Gamma \left[\Delta_2 \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^\epsilon \frac{a_{-2}}{\Gamma(1+\epsilon)} + \Delta_1 \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^\epsilon \frac{a_{-1}}{\Gamma(1+\epsilon)} + a_0 \right]$$

dieser Arbeit erfordert einen Faktor $r_\Gamma (4\pi)^\epsilon$. Nach der Umrechnung

$$\frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

folgt

$$I_N = \Delta_2 \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 \right) a_{-2} + \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^\epsilon a_{-1} + a_0 + O(\epsilon) \\ = \Delta_2 a_{-2} + \Delta_1 \left[a_{-2} \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) + a_{-1} \right] \\ + \left[a_0 - \frac{\pi^2}{6} a_{-2} + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) a_{-2} + \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) a_{-1} \right].$$

Entfernen resonanter Diagramme

Für den Prozess $u\bar{u} \rightarrow t\bar{s}\bar{c}b$ in führender Ordnung wurde unter anderem folgender Code in C++ durch MadGraph5_aMC@NLO [73] generiert. Es werden dabei Funktionen `ixxxxx`, `oxxxxx` und `FFV` aus HELAS [74] eingebunden.

```
void calculate_wavefunctions(const int perm[], const int hel[])
{
  int i, j;
  ixxxxx(p[perm[0]], mME[0], hel[0], +1, w[0]);
  oxxxxx(p[perm[1]], mME[1], hel[1], -1, w[1]);
  oxxxxx(p[perm[2]], mME[2], hel[2], +1, w[2]);
  oxxxxx(p[perm[3]], mME[3], hel[3], +1, w[3]);
  ixxxxx(p[perm[4]], mME[4], hel[4], -1, w[4]);
  ixxxxx(p[perm[5]], mME[5], hel[5], -1, w[5]);
  FFV1_3(w[0], w[1], pars->GC_11, pars->ZERO, pars->ZERO, w[6]);
  FFV2_3(w[4], w[3], pars->GC_100, pars->MW, pars->WW, w[7]);
  FFV1_1(w[2], w[6], pars->GC_11, pars->MT, pars->WT, w[8]);
  FFV1_2(w[5], w[6], pars->GC_11, pars->MB, pars->ZERO, w[9]);
  FFV2_3(w[5], w[2], pars->GC_100, pars->MW, pars->WW, w[10]);
  FFV1_2(w[4], w[6], pars->GC_11, pars->ZERO, pars->ZERO, w[11]);
  FFV1_1(w[3], w[6], pars->GC_11, pars->ZERO, pars->ZERO, w[12]);
  FFV2_0(w[5], w[8], w[7], pars->GC_100, amp[0]);
  FFV2_0(w[9], w[2], w[7], pars->GC_100, amp[1]);
  FFV2_0(w[11], w[3], w[10], pars->GC_100, amp[2]);
  FFV2_0(w[4], w[12], w[10], pars->GC_100, amp[3]);
  amp[0]=0.0;
  amp[1]=0.0;
}
```

Diese Funktion berechnet die vier Diagramme des Prozesses und speichert das Ergebnis im globalen Feld `amp`. Es gilt die Zuordnung `w[3]` zu s und `w[4]` zu \bar{c} . Folglich beschreibt `w[7]` ein virtuelles W -Boson, das an ein auslaufendes Paar $s\bar{c}$ von Quarks koppelt. Daher muss `amp[0]` und `amp[1]` zu Null gesetzt werden, um resonante Diagramme zu entfernen.

A.4 Referenzwerte

Zunächst werden zwei Referenzphasenraumpunkte angegeben. Es gilt $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 + q_3$ für die Kinematik der Born-Prozesse und $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ für die Kinematik der reellen Prozesse. Für $2 \rightarrow 3$ Prozesse wurde ein Phasenraumpunkt mit einer partonischen Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} \approx 1 \text{ TeV}$ gewählt. Es gilt $p_1^2 = p_2^2 = q_2^2 = q_3^2 = 0$ und

$q_1^2 = (173,21 \text{ GeV})^2$. Die fünf Impulse sind

$$\begin{aligned}
p_1 &= \begin{pmatrix} +2,6004603433146476e+03 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ +2,6004603433146476e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} +1,0147878922379546e+02 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ -1,0147878922379546e+02 \end{pmatrix} \text{ GeV} \\
q_1 &= \begin{pmatrix} +1,8260053088517320e+03 \\ -3,7558511180666488e+02 \\ -2,5218722219220072e+02 \\ +1,7605769260690843e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} +7,4772494082986739e+01 \\ +4,7155013086119425e+01 \\ -1,1479239305614193e+01 \\ +5,6881962670099874e+01 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \\
q_3 &= \begin{pmatrix} +8,0116132960372431e+02 \\ +3,2843009872054540e+02 \\ +2,6366646149781491e+02 \\ +6,8152266535166802e+02 \end{pmatrix} \text{ GeV}.
\end{aligned}$$

Für $2 \rightarrow 4$ Prozesse wurde der folgende Phasenraumpunkt als Referenz verwendet. Es gilt $q_4^2 = (173,21 \text{ GeV})^2$, während die anderen Impulse masselos sind. Die sechs Impulse sind

$$\begin{aligned}
p_1 &= \begin{pmatrix} +6,07170225977345e+03 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ +6,07170225977345e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} +6,75449163014037e+03 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ +0,0000000000000000e+00 \\ -6,75449163014037e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \\
q_1 &= \begin{pmatrix} +8,38912953135066e+02 \\ -1,13864508958963e+01 \\ -1,39443806330795e-15 \\ +8,31149695624880e+02 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} +2,68344926606105e+03 \\ -1,10472274145974e+01 \\ -2,19247557703296e+01 \\ -2,68333695747933e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \\
q_3 &= \begin{pmatrix} +5,98597257412603e+03 \\ -5,23975335554237e+01 \\ -2,20770065096711e+01 \\ +5,98570252873043e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV} \text{ und } q_4 = \begin{pmatrix} +4,07288075441324e+03 \\ +7,48312118659175e+01 \\ +4,40017622800007e+01 \\ -4,06826991118051e+03 \end{pmatrix} \text{ GeV}.
\end{aligned}$$

Für diesen Phasenraumpunkt gilt $\sqrt{\hat{s}} > 13 \text{ TeV}$.

In den Tabellen A.7 bis A.15 werden differenzielle Wirkungsquerschnitte bei der hadronischen Schwerpunktsenergie $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ angegeben. Es werden die Werte für 50 Klassen mit den berechneten statistischen Unsicherheiten aus der Monte-Carlo-Integration angegeben. Es wird stets die untere Grenze der Klasse angegeben. Die Breite der Klassen ist innerhalb eines Histogramms immer gleich.

A.5 Verwendete Hilfsmittel

Zur Erzeugung und Berechnung der Amplituden wurden folgende Programme eingesetzt:

- QGRAF [56]: Erzeugung der Einschleifen-Diagramme
- FORM [34]: Optimierung der Born-Amplitude, Umformung des Outputs von QGRAF für die Einschleifen-Diagramme
- MAPLE 2016 (Waterloo Maple Inc.): Optimierung der Einschleifen-Amplitude
- Private Implementierung von Peter Uwer [62]: Tensorreduktion
- PJFRY [64]: Tensorreduktion
- QCDLOOP [59], FF [60]: Berechnung der skalaren Integrale
- MadGraph5_aMC@NLO [73]: Berechnung der Betragsquadrate der Born-Amplituden für die reellen Prozesse

Zur Validierung wurden folgende Programme eingesetzt:

- GOSAM [78]: Vergleich der Einschleifen-Amplitude
- SUPERAUTODIPOLE [79]: Vergleich des Subtraktionsterms und des integrierten Subtraktionsterms

Für die Phasenraumintegration wurden folgende Bibliotheken eingebunden :

- LHAPDF [85]: Einbinden der Partonverteilungsfunktionen
- FASTJET [39]: Anti- k_t Algorithmus
- VEGAS [42]: Monte-Carlo-Integration

Auswertung der Ergebnisse:

- IPYTHON [86]
- NUMPY [87]
- MATPLOTLIB [88]: Erzeugen der Abbildungen

Erstellen der Dissertation:

- PDFLATEX
- BIBTEX
- JAXODRAW [89]: Abbildungen mit Feynman-Diagrammen

Prozess	$ \mathcal{A}_R ^2 \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	$S \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	DNL	Δ
$\bar{d}\bar{u} \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{b}t$	2,271698673155e-03	2,3415507491e-03	2,3415507493e-03	10,3
$\bar{u}\bar{d} \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{b}t$	1,171567991253e-02	3,0918839545e-02	3,0918839546e-02	10,3
$u\bar{d} \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{b}t$	2,457854191908e-13	3,9515065115e-10	3,9515065115e-10	11,1
$\bar{d}u \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{b}t$	4,543416677826e-03	4,6831629894e-03	4,6831629896e-03	10,3
$b\bar{d} \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{u}t$	1,267325852575e-13	6,7936083312e-14	6,7936083311e-14	11,0
$\bar{d}b \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{u}t$	8,681882672552e-06	5,2048338017e-06	5,2048338017e-06	11,8
$u\bar{u} \rightarrow \bar{u}\bar{b}dt$	5,399826620357e-05	2,5428693557e-02	2,5428693558e-02	10,5
$\bar{u}u \rightarrow \bar{u}\bar{b}dt$	9,136475457561e-05	2,3072735393e-04	2,3072735393e-04	10,8
$b\bar{u} \rightarrow \bar{u}\bar{u}dt$	1,453838966329e-08	1,5763764447e-08	1,5763764447e-08	10,3
$\bar{u}b \rightarrow \bar{u}\bar{u}dt$	2,819150418221e-04	1,1234302142e-03	1,1234302142e-03	11,3
$uu \rightarrow \bar{b}udt$	2,878999601230e+00	2,9703896511e+00	2,9703896512e+00	10,3
$bu \rightarrow \bar{u}udt$	2,910770807274e-08	9,5669889435e-08	9,5669889439e-08	10,4
$ub \rightarrow \bar{u}udt$	1,726093334681e-05	7,6799032806e-04	7,6799032807e-04	11,1
$\bar{d}b \rightarrow \bar{b}\bar{u}\bar{b}t$	6,884086047178e-13	1,7899519730e-08	1,7899519730e-08	11,2
$\bar{b}\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{u}\bar{b}t$	4,629749987910e+00	7,4138858426e+01	7,4138858430e+01	10,3
$u\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{b}\bar{b}t$	3,449684909758e-13	2,1403745018e-13	2,1403745018e-13	10,5
$\bar{d}u \rightarrow \bar{b}\bar{b}\bar{b}t$	8,262981166625e-13	3,5397955136e-08	3,5397955137e-08	10,6
$b\bar{d} \rightarrow \bar{b}\bar{b}\bar{u}t$	6,678881670327e-13	3,8347208448e-10	3,8347208448e-10	11,1
$\bar{d}b \rightarrow \bar{b}\bar{b}\bar{u}t$	2,884714616158e+00	2,9783252603e+00	2,9783252604e+00	10,3
$u\bar{b} \rightarrow \bar{b}\bar{b}dt$	1,439765189469e+00	1,4979091678e+00	1,4979091679e+00	10,3
$\bar{b}u \rightarrow \bar{b}\bar{b}dt$	4,568234598911e-05	1,1536817784e-04	1,1536817784e-04	10,9
$b\bar{b} \rightarrow \bar{b}\bar{u}dt$	1,056630982071e-13	2,4277658242e-09	2,4277658243e-09	10,6
$\bar{b}b \rightarrow \bar{b}\bar{u}dt$	5,638284454558e-04	1,4892802019e-03	1,4892802019e-03	11,4
$bu \rightarrow \bar{b}\bar{b}dt$	1,654635618094e-12	7,5571881507e-08	7,5571881509e-08	10,5
$ub \rightarrow \bar{b}\bar{b}dt$	2,877051572008e+00	2,9704000522e+00	2,9704000523e+00	10,3
$bb \rightarrow \bar{u}bdt$	3,363994230558e-08	7,5760932621e-04	7,5760932621e-04	11,1

Tabelle A.1: Reelle Korrekturen und Subtraktionsterm für $ub \rightarrow dtu\bar{u}$ und $ub \rightarrow dtb\bar{b}$

Prozess	$ \mathcal{A}_R ^2 \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	$S \times \text{CKM} \times \text{PDF}$	DNL	Δ
$\bar{d}\bar{d} \rightarrow \bar{d}\bar{u}b\bar{t}$	2,343142011644e-02	6,1837681172e-02	6,1837681175e-02	10,3
$d\bar{d} \rightarrow \bar{u}b\bar{d}t$	2,159582382345e-01	3,0457371899e-01	3,0457371900e-01	10,4
$\bar{d}d \rightarrow \bar{u}b\bar{d}t$	1,265973457331e-10	5,0836803446e-08	5,0836803448e-08	10,5
$u\bar{d} \rightarrow \bar{d}b\bar{d}t$	6,810355582283e-04	2,5941778773e-02	2,5941778773e-02	10,5
$\bar{d}u \rightarrow \bar{d}b\bar{d}t$	1,928618824311e-04	3,1368750300e-04	3,1368750300e-04	10,9
$b\bar{d} \rightarrow \bar{d}\bar{u}d\bar{t}$	2,602832039438e-02	2,1287901309e-02	2,1287901309e-02	10,4
$\bar{d}b \rightarrow \bar{d}\bar{u}d\bar{t}$	1,190202435847e-03	2,0012514677e-03	2,0012514677e-03	11,9
$ud \rightarrow \bar{b}d\bar{d}t$	1,439499800663e+00	1,4851948210e+00	1,4851948211e+00	10,3
$du \rightarrow \bar{b}d\bar{d}t$	4,992359906385e+00	8,1894959412e+01	8,1894959416e+01	10,3
$bd \rightarrow \bar{u}d\bar{d}t$	1,453960140110e-08	1,4549949928e-08	1,4549949929e-08	10,2
$db \rightarrow \bar{u}d\bar{d}t$	4,763144516600e-01	7,5347668806e+00	7,5347668807e+00	10,8
$bu \rightarrow \bar{d}d\bar{d}t$	1,438185227688e-02	1,1762770831e-02	1,1762770831e-02	10,4
$ub \rightarrow \bar{d}d\bar{d}t$	1,412284658944e-03	1,1527593768e-03	1,1527593768e-03	10,8
$\bar{d}\bar{c} \rightarrow \bar{c}\bar{u}b\bar{t}$	1,278709835388e-12	2,4774482132e-09	2,4774482133e-09	10,8
$\bar{c}\bar{d} \rightarrow \bar{c}\bar{u}b\bar{t}$	2,343131489351e-02	6,1837678695e-02	6,1837678697e-02	10,3
$u\bar{d} \rightarrow \bar{c}c\bar{b}d\bar{t}$	2,497012033262e-16	1,4512419138e-15	1,4512419130e-15	9,2
$\bar{d}u \rightarrow \bar{c}c\bar{b}d\bar{t}$	2,173663815010e-13	6,3968532592e-08	6,3968532594e-08	10,6
$c\bar{d} \rightarrow \bar{u}c\bar{b}t$	2,455357177848e-13	3,9514919991e-10	3,9514919991e-10	11,1
$\bar{d}c \rightarrow \bar{u}c\bar{b}t$	4,543411419735e-03	4,6830990208e-03	4,6830990211e-03	10,3
$b\bar{d} \rightarrow \bar{c}c\bar{u}t$	2,435659726383e-16	1,4890716961e-15	1,4890716945e-15	9,0
$\bar{d}b \rightarrow \bar{c}c\bar{u}t$	1,736820461501e-05	1,0408557190e-05	1,0408557190e-05	11,8
$u\bar{c} \rightarrow \bar{c}\bar{b}d\bar{t}$	5,399816423918e-05	2,5428693557e-02	2,5428693558e-02	10,5
$\bar{c}u \rightarrow \bar{c}\bar{b}d\bar{t}$	9,136469037976e-05	2,3072735393e-04	2,3072735393e-04	10,9
$c\bar{c} \rightarrow \bar{u}b\bar{d}t$	6,051068409062e-11	0,0000000000e+00	0,0000000000e+00	16,0
$\bar{c}c \rightarrow \bar{u}b\bar{d}t$	6,051068409062e-11	0,0000000000e+00	0,0000000000e+00	16,0
$b\bar{c} \rightarrow \bar{c}\bar{u}d\bar{t}$	7,791591376270e-15	2,4277658242e-09	2,4277658243e-09	10,6
$\bar{c}b \rightarrow \bar{c}\bar{u}d\bar{t}$	5,638284453067e-04	1,4892802019e-03	1,4892802019e-03	11,4
$cu \rightarrow \bar{b}c\bar{d}t$	1,294159720940e-12	9,0017551408e-09	9,0017551410e-09	10,8
$uc \rightarrow \bar{b}c\bar{d}t$	2,878999601071e+00	2,9703896421e+00	2,9703896422e+00	10,3
$bu \rightarrow \bar{c}c\bar{d}t$	2,264277834584e-13	6,6570126366e-08	6,6570126368e-08	10,5
$ub \rightarrow \bar{c}c\bar{d}t$	1,725807006604e-05	1,0410101615e-05	1,0410101615e-05	11,8
$bc \rightarrow \bar{u}c\bar{d}t$	2,907918590583e-08	2,9099763069e-08	2,9099763071e-08	10,2
$cb \rightarrow \bar{u}c\bar{d}t$	1,695479533198e-09	7,5758022644e-04	7,5758022645e-04	11,1

Tabelle A.2: Reelle Korrekturen und Subtraktionsterm für $ub \rightarrow dt\bar{d}\bar{d}$ und $ub \rightarrow dtc\bar{c}$

$\sigma(\mu)$	$\sigma^t(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^t(m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(m_t)$	$\sigma^t(2m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(2m_t)$
σ^B	23,960(2)	15,886(1)	22,195(2)	14,671(1)	20,528(2)	13,528(1)
σ^{PK}	9,717(3)	6,603(2)	7,670(3)	5,282(2)	6,397(3)	4,459(2)
σ^R	3,01(1)	0,834(8)	1,992(7)	0,440(7)	1,322(9)	0,190(6)
σ^I	-6,787(1)	-4,5224(9)	-1,176(1)	-0,495(2)	7,336(2)	5,323(1)
σ^V	0,030(2)	-0,202(1)	-2,376(2)	-2,041(1)	-8,555(4)	-6,281(3)
σ_{NLO}	29,93(1)	18,597(9)	28,307(8)	17,856(7)	27,03(1)	17,218(7)

Tabelle A.3: Teilergebnisse in pb für $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ bei der zentralen Skala $\mu_F = \mu_R = m_t$ sowie bei den variierten Skalen $\mu = m_t/2$ und $\mu = 2m_t$

$\sigma(\mu)$	$\sigma^t(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^t(m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(m_t)$	$\sigma^t(2m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(2m_t)$
σ^B	26,855(2)	18,182(1)	24,995(2)	16,879(1)	23,211(2)	15,633(1)
σ^{PK}	10,332(8)	7,578(4)	8,574(8)	6,028(5)	7,499(8)	5,039(5)
σ^R	3,93(6)	1,12(3)	2,71(3)	0,69(2)	1,96(4)	0,37(2)
σ^I	-7,593(3)	-5,174(2)	-1,354(4)	-0,597(2)	8,221(8)	6,101(5)
σ^V	-0,034(2)	-0,258(2)	-2,687(5)	-2,344(3)	-9,644(9)	-7,235(6)
σ_{NLO}	33,49(6)	21,44(4)	32,24(3)	20,65(2)	31,25(4)	19,90(2)

$\sigma(\mu)$	$\sigma^t(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^t(m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(m_t)$	$\sigma^t(2m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(2m_t)$
σ^B	8,3111(6)	4,5274(3)	7,3886(6)	3,9967(3)	6,5959(5)	3,5457(3)
σ^{PK}	3,165(2)	1,870(1)	2,764(2)	1,591(1)	2,500(2)	1,412(1)
σ^R	-0,12(1)	-0,134(6)	-0,21(1)	-0,150(6)	-0,230(9)	-0,154(4)
σ^I	-2,3721(8)	-1,2835(4)	-0,255(1)	-0,0588(5)	2,585(2)	1,513(1)
σ^V	0,1762(7)	-0,0009(4)	-0,800(2)	-0,579(1)	-2,878(3)	-1,712(2)
σ_{NLO}	9,16(1)	4,979(7)	8,89(1)	4,800(6)	8,57(1)	4,604(5)

$\sigma(\mu)$	$\sigma^t(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(\frac{1}{2}m_t)$	$\sigma^t(m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(m_t)$	$\sigma^t(2m_t)$	$\sigma^{\bar{t}}(2m_t)$
σ^B	10,6519(8)	6,0703(4)	9,5558(8)	5,4130(4)	8,5977(7)	4,8432(4)
σ^{PK}	4,046(3)	2,4989(7)	3,498(1)	2,1021(7)	3,146(3)	1,8479(7)
σ^R	0,127(9)	-0,075(5)	-0,044(7)	-0,137(3)	-0,146(6)	-0,154(2)
σ^I	-3,0413(8)	-1,7257(5)	-0,380(1)	-0,1066(7)	3,286(2)	2,027(1)
σ^V	0,1871(9)	-0,0126(5)	-1,0276(8)	-0,7744(5)	-3,704(4)	-2,322(2)
σ_{NLO}	11,97(1)	6,756(5)	11,603(7)	6,498(3)	11,180(8)	6,242(3)

Tabelle A.4: Teilergebnisse in pb für hadronische Schwerpunktsenergien $\sqrt{s_{\text{had}}}$ von 14 TeV (oben), 7 TeV (Mitte) und 8 TeV (unten)

μ_R	μ_F	σ_{LO}^t [pb]	σ_{NLO}^t [pb]	$\sigma_{\text{LO}}^{\bar{t}}$ [pb]	$\sigma_{\text{NLO}}^{\bar{t}}$ [pb]
m_t	m_t	9,5558(8)	11,603(7)	5,4130(4)	6,498(3)
$2m_t$	$2m_t$	8,5977(7)	11,180(8)	4,8432(4)	6,242(3)
$\frac{1}{2}m_t$	$\frac{1}{2}m_t$	10,6519(8)	11,97(1)	6,0703(4)	6,756(5)
$\frac{1}{2}m_t$	m_t	10,5609(8)	11,999(7)	5,9823(4)	6,705(3)
m_t	$\frac{1}{2}m_t$	9,6382(8)	11,60(1)	5,4926(4)	6,554(5)
m_t	$2m_t$	9,4130(7)	11,651(8)	5,3025(4)	6,497(3)
$2m_t$	m_t	8,7282(8)	11,162(7)	4,9442(4)	6,260(3)

Tabelle A.5: Wirkungsquerschnitte bei $\sqrt{s_{\text{had}}} = 8 \text{ TeV}$

$\sigma(\mu)$	$\sigma_t(c_d = \frac{1}{4})$	$\sigma_{\bar{t}}(c_d = \frac{1}{4})$	$\sigma_t(c_d = \frac{1}{2})$	$\sigma_{\bar{t}}(c_d = \frac{1}{2})$	$\sigma_t(c_d = 1)$	$\sigma_{\bar{t}}(c_d = 1)$
σ^{B}	23,066(2)	15,339(1)	21,407(2)	14,197(1)	19,837(2)	13,1179(9)
σ^{PK}	9,076(3)	6,285(6)	7,279(3)	5,092(6)	6,142(3)	4,342(6)
σ^{I}	-6,065(2)	-4,081(1)	0,924(3)	0,696(2)	10,071(7)	6,842(4)
σ^{V}	0,642(2)	0,146(1)	-3,545(7)	-2,690(4)	-10,64(1)	-7,427(5)
σ^{R}	1,70(2)	0,13(3)	1,08(1)	-0,07(2)	0,67(2)	-0,19(1)
R1	-0,221(3)	-0,221(3)	-0,165(2)	-0,165(2)	-0,127(1)	-0,127(1)
R2	-0,241(4)	-0,252(4)	-0,207(3)	-0,218(3)	-0,180(3)	-0,184(2)
R3a	0,16(1)	1,73(2)	0,138(4)	1,32(1)	0,109(2)	1,030(8)
R3b	3,47(1)	-0,060(6)	2,675(8)	-0,056(6)	2,093(6)	-0,048(3)
R4a	-0,340(4)	-0,163(1)	-0,2779(8)	-0,132(1)	-0,2334(7)	-0,113(1)
R4b	-0,233(5)	-0,310(9)	-0,218(3)	-0,287(8)	-0,199(1)	-0,270(5)
R4c	-0,784(7)	-0,345(3)	-0,740(6)	-0,316(4)	-0,66(1)	-0,287(4)
R5	-0,041(3)	-0,133(1)	-0,057(3)	-0,119(1)	-0,069(2)	-0,110(1)
R6	-0,075(1)	-0,108(1)	-0,069(1)	-0,093(1)	-0,064(1)	-0,0793(9)
Gesamt	28,42(2)	17,82(3)	27,14(1)	17,23(2)	26,08(2)	16,69(1)

Tabelle A.6: Teilergebnisse mit numerischen Unsicherheiten in pb für $\sqrt{s_{\text{had}}} = 13 \text{ TeV}$ bei Verwendung der dynamischen Skala $\mu_{\text{dyn}} = c_d [m_t + p_T^{\Sigma}]$

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	3,509796e-01	8,86e-04	3,12e+02	1,056603e-01	6,86e-04
1,25e+01	1,001898e+00	2,05e-03	3,25e+02	9,078948e-02	5,15e-04
2,50e+01	1,542031e+00	2,59e-03	3,38e+02	7,709779e-02	5,25e-04
3,75e+01	1,987901e+00	4,47e-03	3,50e+02	6,448079e-02	1,37e-03
5,00e+01	2,345499e+00	4,74e-03	3,62e+02	5,575341e-02	5,21e-04
6,25e+01	2,580213e+00	6,74e-03	3,75e+02	4,844680e-02	3,98e-04
7,50e+01	2,568943e+00	9,71e-03	3,88e+02	4,111050e-02	5,53e-04
8,75e+01	2,386085e+00	8,91e-03	4,00e+02	3,535805e-02	4,08e-04
1,00e+02	2,120905e+00	8,42e-03	4,12e+02	3,064369e-02	3,14e-04
1,12e+02	1,837373e+00	5,78e-03	4,25e+02	2,608386e-02	3,07e-04
1,25e+02	1,556715e+00	3,89e-03	4,38e+02	2,273707e-02	2,84e-04
1,38e+02	1,320895e+00	4,42e-03	4,50e+02	1,959527e-02	3,22e-04
1,50e+02	1,101593e+00	3,54e-03	4,62e+02	1,715838e-02	2,08e-04
1,62e+02	9,153658e-01	2,46e-03	4,75e+02	1,479360e-02	2,71e-04
1,75e+02	7,614460e-01	2,30e-03	4,88e+02	1,289247e-02	2,60e-04
1,88e+02	6,309108e-01	1,84e-03	5,00e+02	1,115451e-02	2,44e-04
2,00e+02	5,242477e-01	1,96e-03	5,12e+02	1,010495e-02	1,40e-04
2,12e+02	4,334030e-01	1,29e-03	5,25e+02	8,396672e-03	3,87e-04
2,25e+02	3,618873e-01	1,55e-03	5,38e+02	7,656182e-03	1,64e-04
2,38e+02	3,026347e-01	1,49e-03	5,50e+02	6,806394e-03	1,42e-04
2,50e+02	2,531234e-01	1,05e-03	5,62e+02	5,909185e-03	2,03e-04
2,62e+02	2,100096e-01	9,97e-04	5,75e+02	5,014049e-03	1,93e-04
2,75e+02	1,770662e-01	7,33e-04	5,88e+02	4,581080e-03	1,36e-04
2,88e+02	1,491406e-01	1,29e-03	6,00e+02	3,805781e-03	1,03e-04
3,00e+02	1,253310e-01	8,59e-04	6,12e+02	3,527033e-03	1,01e-04
k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	2,373556e-01	1,36e-03	3,12e+02	5,065495e-02	6,07e-04
1,25e+01	6,828093e-01	2,48e-03	3,25e+02	4,257921e-02	4,07e-04
2,50e+01	1,037731e+00	2,70e-03	3,38e+02	3,585119e-02	4,15e-04
3,75e+01	1,345257e+00	4,09e-03	3,50e+02	2,948592e-02	4,30e-04
5,00e+01	1,583748e+00	4,39e-03	3,62e+02	2,556808e-02	3,50e-04
6,25e+01	1,749017e+00	4,77e-03	3,75e+02	2,142650e-02	3,33e-04
7,50e+01	1,718112e+00	5,60e-03	3,88e+02	1,837830e-02	2,63e-04
8,75e+01	1,567345e+00	6,23e-03	4,00e+02	1,571105e-02	3,00e-04
1,00e+02	1,374033e+00	5,12e-03	4,12e+02	1,301409e-02	3,12e-04
1,12e+02	1,156921e+00	3,08e-03	4,25e+02	1,147716e-02	2,54e-04
1,25e+02	9,768356e-01	8,50e-03	4,38e+02	9,328932e-03	1,79e-04
1,38e+02	7,859335e-01	8,74e-03	4,50e+02	8,316632e-03	1,82e-04
1,50e+02	6,530052e-01	3,92e-03	4,62e+02	6,943868e-03	1,76e-04
1,62e+02	5,324163e-01	2,24e-03	4,75e+02	6,355624e-03	2,62e-04
1,75e+02	4,327163e-01	2,32e-03	4,88e+02	5,065702e-03	2,31e-04
1,88e+02	3,546819e-01	1,82e-03	5,00e+02	4,547012e-03	1,30e-04
2,00e+02	2,868808e-01	1,86e-03	5,12e+02	4,221457e-03	2,71e-04
2,12e+02	2,357039e-01	9,45e-04	5,25e+02	3,040186e-03	3,47e-04
2,25e+02	1,939547e-01	1,04e-03	5,38e+02	2,978636e-03	1,93e-04
2,38e+02	1,544721e-01	9,87e-04	5,50e+02	2,513958e-03	1,20e-04
2,50e+02	1,292630e-01	2,87e-03	5,62e+02	2,210859e-03	1,12e-04
2,62e+02	1,052819e-01	1,20e-03	5,75e+02	2,049407e-03	1,12e-04
2,75e+02	8,779702e-02	5,65e-04	5,88e+02	1,811195e-03	4,94e-05
2,88e+02	7,328687e-02	5,96e-04	6,00e+02	1,565078e-03	6,68e-05
3,00e+02	5,964728e-02	6,62e-04	6,12e+02	1,373214e-03	4,58e-05

Tabelle A.7: Histogramm von $d\sigma/dk_T$ für das Top-Quark (oben) und für das Top-Antiquark (unten) bei fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,12e+02	1,035411e-01	9,20e-04
1,25e+01	0,000000e+00	0,00e+00	3,25e+02	8,980691e-02	5,85e-04
2,50e+01	1,490819e+00	5,00e-03	3,38e+02	7,713782e-02	6,82e-04
3,75e+01	2,934256e+00	5,45e-03	3,50e+02	6,463740e-02	1,26e-03
5,00e+01	3,253768e+00	6,41e-03	3,62e+02	5,582906e-02	6,86e-04
6,25e+01	3,091262e+00	5,79e-03	3,75e+02	4,976394e-02	4,20e-04
7,50e+01	2,751842e+00	6,48e-03	3,88e+02	4,242506e-02	4,61e-04
8,75e+01	2,374228e+00	6,11e-03	4,00e+02	3,615857e-02	5,14e-04
1,00e+02	2,009591e+00	5,78e-03	4,12e+02	3,168697e-02	3,25e-04
1,12e+02	1,681229e+00	7,67e-03	4,25e+02	2,805852e-02	3,42e-04
1,25e+02	1,414836e+00	4,86e-03	4,38e+02	2,352896e-02	3,61e-04
1,38e+02	1,170910e+00	3,79e-03	4,50e+02	2,084046e-02	2,85e-04
1,50e+02	9,725837e-01	4,10e-03	4,62e+02	1,838046e-02	3,95e-04
1,62e+02	8,052016e-01	3,95e-03	4,75e+02	1,614686e-02	3,11e-04
1,75e+02	6,731819e-01	2,42e-03	4,88e+02	1,424903e-02	2,72e-04
1,88e+02	5,619805e-01	1,96e-03	5,00e+02	1,286582e-02	2,65e-04
2,00e+02	4,696374e-01	2,08e-03	5,12e+02	1,034273e-02	4,15e-04
2,12e+02	3,994566e-01	2,90e-03	5,25e+02	9,342758e-03	1,91e-04
2,25e+02	3,243381e-01	2,38e-03	5,38e+02	8,460648e-03	2,90e-04
2,38e+02	2,747631e-01	3,25e-03	5,50e+02	7,936485e-03	2,57e-04
2,50e+02	2,367006e-01	3,28e-03	5,62e+02	6,772866e-03	1,42e-04
2,62e+02	1,974397e-01	1,10e-03	5,75e+02	5,838542e-03	1,17e-04
2,75e+02	1,686000e-01	9,94e-04	5,88e+02	5,277662e-03	1,02e-04
2,88e+02	1,412205e-01	1,62e-03	6,00e+02	4,603580e-03	1,64e-04
3,00e+02	1,226086e-01	1,40e-03	6,12e+02	4,030171e-03	1,15e-04
k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,12e+02	5,282728e-02	6,06e-04
1,25e+01	0,000000e+00	0,00e+00	3,25e+02	4,460977e-02	5,57e-04
2,50e+01	9,929138e-01	3,98e-03	3,38e+02	3,730070e-02	6,96e-04
3,75e+01	1,969699e+00	6,25e-03	3,50e+02	3,279044e-02	4,57e-04
5,00e+01	2,186621e+00	5,50e-03	3,62e+02	2,781494e-02	5,58e-04
6,25e+01	2,059405e+00	5,49e-03	3,75e+02	2,431178e-02	4,19e-04
7,50e+01	1,802699e+00	4,66e-03	3,88e+02	2,070046e-02	7,66e-04
8,75e+01	1,530737e+00	4,30e-03	4,00e+02	1,682433e-02	5,35e-04
1,00e+02	1,284271e+00	5,10e-03	4,12e+02	1,513315e-02	2,73e-04
1,12e+02	1,052568e+00	4,26e-03	4,25e+02	1,340423e-02	2,75e-04
1,25e+02	8,572238e-01	4,01e-03	4,38e+02	1,124048e-02	2,43e-04
1,38e+02	7,072754e-01	2,62e-03	4,50e+02	9,812049e-03	2,05e-04
1,50e+02	5,813029e-01	3,02e-03	4,62e+02	8,350157e-03	2,52e-04
1,62e+02	4,691007e-01	2,78e-03	4,75e+02	7,037957e-03	1,94e-04
1,75e+02	3,890800e-01	2,57e-03	4,88e+02	6,612204e-03	1,70e-04
1,88e+02	3,229820e-01	2,97e-03	5,00e+02	5,811585e-03	2,07e-04
2,00e+02	2,649897e-01	2,22e-03	5,12e+02	4,780708e-03	1,93e-04
2,12e+02	2,183248e-01	1,67e-03	5,25e+02	4,114375e-03	1,23e-04
2,25e+02	1,799625e-01	1,42e-03	5,38e+02	3,863764e-03	1,24e-04
2,38e+02	1,521087e-01	1,35e-03	5,50e+02	3,014083e-03	1,75e-04
2,50e+02	1,246996e-01	1,06e-03	5,62e+02	2,977933e-03	7,88e-05
2,62e+02	1,081054e-01	1,74e-03	5,75e+02	2,605409e-03	7,41e-05
2,75e+02	8,279516e-02	3,16e-03	5,88e+02	2,291528e-03	7,56e-05
2,88e+02	7,514768e-02	7,61e-04	6,00e+02	1,963786e-03	7,98e-05
3,00e+02	6,172350e-02	8,33e-04	6,12e+02	1,943874e-03	7,47e-05

Tabelle A.8: Histogramm von $d\sigma/dk_T$ für den ersten Jets bei t (oben) und bei \bar{t} (unten) Produktion mit fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,12e+02	1,042253e-02	9,40e-05
1,25e+01	0,000000e+00	0,00e+00	3,25e+02	8,725322e-03	8,16e-05
2,50e+01	1,091592e+01	1,33e-02	3,38e+02	7,219082e-03	1,02e-04
3,75e+01	6,134001e+00	7,92e-03	3,50e+02	6,280171e-03	1,57e-04
5,00e+01	3,673520e+00	4,81e-03	3,62e+02	5,096042e-03	1,58e-04
6,25e+01	2,322776e+00	5,51e-03	3,75e+02	4,259904e-03	7,79e-05
7,50e+01	1,507801e+00	4,37e-03	3,88e+02	3,773185e-03	7,13e-05
8,75e+01	1,020031e+00	2,19e-03	4,00e+02	3,127932e-03	6,10e-05
1,00e+02	7,031165e-01	1,68e-03	4,12e+02	2,730845e-03	3,37e-05
1,12e+02	4,954516e-01	1,73e-03	4,25e+02	2,316453e-03	3,78e-05
1,25e+02	3,578958e-01	1,38e-03	4,38e+02	1,975679e-03	3,58e-05
1,38e+02	2,625493e-01	1,16e-03	4,50e+02	1,745750e-03	3,09e-05
1,50e+02	1,961267e-01	6,39e-04	4,62e+02	1,512829e-03	6,44e-05
1,62e+02	1,473507e-01	5,46e-04	4,75e+02	1,277895e-03	4,57e-05
1,75e+02	1,131239e-01	5,10e-04	4,88e+02	1,065780e-03	3,28e-05
1,88e+02	8,755669e-02	3,88e-04	5,00e+02	1,006638e-03	2,47e-05
2,00e+02	6,821558e-02	3,43e-04	5,12e+02	8,509127e-04	2,38e-05
2,12e+02	5,440178e-02	3,12e-04	5,25e+02	7,507340e-04	2,12e-05
2,25e+02	4,261656e-02	3,39e-04	5,38e+02	6,566599e-04	1,37e-05
2,38e+02	3,473225e-02	2,23e-04	5,50e+02	5,812572e-04	2,08e-05
2,50e+02	2,759266e-02	1,60e-04	5,62e+02	4,901998e-04	1,68e-05
2,62e+02	2,258287e-02	2,91e-04	5,75e+02	4,534610e-04	1,51e-05
2,75e+02	1,868896e-02	2,37e-04	5,88e+02	4,079882e-04	1,77e-05
2,88e+02	1,512980e-02	1,42e-04	6,00e+02	3,338434e-04	1,17e-05
3,00e+02	1,252222e-02	1,10e-04	6,12e+02	3,042909e-04	8,54e-06

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,12e+02	6,181516e-03	2,22e-04
1,25e+01	0,000000e+00	0,00e+00	3,25e+02	4,609405e-03	2,19e-04
2,50e+01	7,021742e+00	1,00e-02	3,38e+02	4,157580e-03	9,16e-05
3,75e+01	3,927519e+00	7,73e-03	3,50e+02	3,434613e-03	5,04e-05
5,00e+01	2,320756e+00	5,88e-03	3,62e+02	2,989386e-03	6,74e-05
6,25e+01	1,441785e+00	3,33e-03	3,75e+02	2,377904e-03	7,52e-05
7,50e+01	9,286426e-01	2,10e-03	3,88e+02	2,068302e-03	2,73e-05
8,75e+01	6,165077e-01	2,30e-03	4,00e+02	1,860225e-03	4,69e-05
1,00e+02	4,171569e-01	2,50e-03	4,12e+02	1,449983e-03	4,92e-05
1,12e+02	2,940778e-01	1,04e-03	4,25e+02	1,282887e-03	3,46e-05
1,25e+02	2,093805e-01	9,95e-04	4,38e+02	1,173354e-03	3,96e-05
1,38e+02	1,529371e-01	1,00e-03	4,50e+02	9,146367e-04	2,99e-05
1,50e+02	1,126178e-01	7,27e-04	4,62e+02	9,238967e-04	5,50e-05
1,62e+02	8,536675e-02	4,92e-04	4,75e+02	6,684130e-04	4,31e-05
1,75e+02	6,550166e-02	3,79e-04	4,88e+02	6,265586e-04	2,02e-05
1,88e+02	4,905380e-02	5,69e-04	5,00e+02	5,595210e-04	1,77e-05
2,00e+02	3,951592e-02	4,55e-04	5,12e+02	4,781455e-04	1,48e-05
2,12e+02	3,068622e-02	3,32e-04	5,25e+02	4,250641e-04	1,85e-05
2,25e+02	2,463238e-02	2,81e-04	5,38e+02	3,542648e-04	1,75e-05
2,38e+02	1,934398e-02	2,34e-04	5,50e+02	3,445363e-04	1,33e-05
2,50e+02	1,550507e-02	2,37e-04	5,62e+02	3,058753e-04	1,33e-05
2,62e+02	1,300019e-02	1,64e-04	5,75e+02	2,316273e-04	1,77e-05
2,75e+02	1,026922e-02	1,42e-04	5,88e+02	2,195219e-04	1,06e-05
2,88e+02	8,446771e-03	9,38e-05	6,00e+02	1,867812e-04	1,02e-05
3,00e+02	7,054276e-03	9,40e-05	6,12e+02	1,797675e-04	1,21e-05

Tabelle A.9: Histogramm von $d\sigma/dk_T$ für den zweiten Jet bei t (oben) und \bar{t} (unten)
Produktion mit fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-5,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00	-1,39e-15	1,837026e+00	2,56e-03
-5,40e+00	0,000000e+00	0,00e+00	2,25e-01	1,804466e+00	2,46e-03
-5,18e+00	0,000000e+00	0,00e+00	4,50e-01	1,717042e+00	4,29e-03
-4,95e+00	0,000000e+00	0,00e+00	6,75e-01	1,604305e+00	2,12e-03
-4,73e+00	0,000000e+00	0,00e+00	9,00e-01	1,462285e+00	2,32e-03
-4,50e+00	-1,461845e-11	1,89e-11	1,12e+00	1,299467e+00	2,80e-03
-4,28e+00	6,736735e-06	5,10e-07	1,35e+00	1,117038e+00	1,57e-03
-4,05e+00	3,529987e-04	1,89e-05	1,57e+00	9,319686e-01	1,65e-03
-3,83e+00	3,425762e-03	1,24e-04	1,80e+00	7,497900e-01	1,77e-03
-3,60e+00	1,601913e-02	6,65e-04	2,02e+00	5,811471e-01	3,16e-03
-3,38e+00	4,529536e-02	5,61e-04	2,25e+00	4,213031e-01	1,35e-03
-3,15e+00	9,764915e-02	7,45e-04	2,47e+00	2,857988e-01	3,83e-03
-2,93e+00	1,775372e-01	1,63e-03	2,70e+00	1,790790e-01	8,74e-04
-2,70e+00	2,898333e-01	1,38e-03	2,92e+00	9,852027e-02	1,24e-03
-2,48e+00	4,263205e-01	1,52e-03	3,15e+00	4,549727e-02	6,50e-04
-2,25e+00	5,782292e-01	1,91e-03	3,37e+00	1,577539e-02	2,45e-04
-2,03e+00	7,516772e-01	1,25e-03	3,60e+00	3,546429e-03	1,01e-04
-1,80e+00	9,317378e-01	1,66e-03	3,82e+00	4,069270e-04	3,08e-05
-1,58e+00	1,115163e+00	2,02e-03	4,05e+00	6,121149e-06	1,84e-06
-1,35e+00	1,295345e+00	3,16e-03	4,27e+00	1,127336e-11	1,31e-11
-1,13e+00	1,464581e+00	1,85e-03	4,50e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-9,00e-01	1,602280e+00	2,24e-03	4,72e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-6,75e-01	1,715746e+00	2,84e-03	4,95e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-4,50e-01	1,798441e+00	2,34e-03	5,17e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-2,25e-01	1,839604e+00	3,12e-03	5,40e+00	0,000000e+00	0,00e+00
k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-5,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00	-1,39e-15	1,295496e+00	2,22e-03
-5,40e+00	0,000000e+00	0,00e+00	2,25e-01	1,264578e+00	2,18e-03
-5,18e+00	0,000000e+00	0,00e+00	4,50e-01	1,188890e+00	3,09e-03
-4,95e+00	0,000000e+00	0,00e+00	6,75e-01	1,087914e+00	2,21e-03
-4,73e+00	0,000000e+00	0,00e+00	9,00e-01	9,644592e-01	2,38e-03
-4,50e+00	-1,604057e-10	1,97e-10	1,12e+00	8,266779e-01	1,94e-03
-4,28e+00	9,360765e-07	2,39e-07	1,35e+00	6,750050e-01	1,76e-03
-4,05e+00	1,676508e-05	8,87e-07	1,57e+00	5,322392e-01	1,60e-03
-3,83e+00	4,151234e-04	1,41e-05	1,80e+00	3,977830e-01	1,35e-03
-3,60e+00	3,047976e-03	1,02e-04	2,02e+00	2,831221e-01	1,53e-03
-3,38e+00	1,077078e-02	1,72e-04	2,25e+00	1,872842e-01	8,55e-04
-3,15e+00	2,902477e-02	4,25e-04	2,47e+00	1,144923e-01	8,79e-04
-2,93e+00	6,202941e-02	7,37e-04	2,70e+00	6,176349e-02	5,87e-04
-2,70e+00	1,126214e-01	1,16e-03	2,92e+00	3,050731e-02	1,01e-03
-2,48e+00	1,894430e-01	1,26e-03	3,15e+00	1,075300e-02	2,09e-04
-2,25e+00	2,821791e-01	1,14e-03	3,37e+00	2,890200e-03	6,60e-05
-2,03e+00	4,006183e-01	1,58e-03	3,60e+00	3,900934e-04	1,89e-05
-1,80e+00	5,318771e-01	2,18e-03	3,82e+00	1,623496e-05	1,25e-06
-1,58e+00	6,761600e-01	1,43e-03	4,05e+00	3,070042e-07	1,27e-07
-1,35e+00	8,254498e-01	2,11e-03	4,27e+00	3,008578e-11	3,24e-11
-1,13e+00	9,679640e-01	2,08e-03	4,50e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-9,00e-01	1,085418e+00	2,17e-03	4,72e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-6,75e-01	1,188730e+00	3,96e-03	4,95e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-4,50e-01	1,261930e+00	2,31e-03	5,17e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-2,25e-01	1,299040e+00	2,59e-03	5,40e+00	0,000000e+00	0,00e+00

Tabelle A.10: Histogramm von $d\sigma/dy$ für das Top-Quark (oben) und für das Top-Antiquark (unten) bei fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-5,62e+00	8,897641e-03	4,01e-04	-1,39e-15	9,289614e-01	2,31e-03
-5,40e+00	1,386265e-02	6,25e-04	2,25e-01	9,488624e-01	2,38e-03
-5,18e+00	2,290788e-02	5,13e-04	4,50e-01	9,857692e-01	1,89e-03
-4,95e+00	3,296414e-02	7,26e-04	6,75e-01	1,023647e+00	1,92e-03
-4,73e+00	5,148843e-02	7,77e-04	9,00e-01	1,052227e+00	3,00e-03
-4,50e+00	7,428223e-02	8,91e-04	1,12e+00	1,088648e+00	4,12e-03
-4,28e+00	1,099039e-01	1,13e-03	1,35e+00	1,087834e+00	2,61e-03
-4,05e+00	1,570986e-01	1,22e-03	1,57e+00	1,064414e+00	2,57e-03
-3,83e+00	2,187325e-01	1,44e-03	1,80e+00	1,008281e+00	1,93e-03
-3,60e+00	2,956311e-01	1,42e-03	2,02e+00	9,305039e-01	2,38e-03
-3,38e+00	3,889220e-01	1,34e-03	2,25e+00	8,331224e-01	2,20e-03
-3,15e+00	4,906461e-01	1,79e-03	2,47e+00	7,178858e-01	2,88e-03
-2,93e+00	6,016704e-01	2,03e-03	2,70e+00	6,084435e-01	2,31e-03
-2,70e+00	7,196100e-01	2,50e-03	2,92e+00	4,893120e-01	3,20e-03
-2,48e+00	8,347598e-01	2,12e-03	3,15e+00	3,844849e-01	3,87e-03
-2,25e+00	9,276529e-01	2,37e-03	3,37e+00	2,938782e-01	1,56e-03
-2,03e+00	1,008621e+00	2,48e-03	3,60e+00	2,179992e-01	1,90e-03
-1,80e+00	1,058975e+00	2,89e-03	3,82e+00	1,591857e-01	1,05e-03
-1,58e+00	1,083337e+00	2,56e-03	4,05e+00	1,093657e-01	9,18e-04
-1,35e+00	1,085231e+00	1,98e-03	4,27e+00	7,557598e-02	7,11e-04
-1,13e+00	1,058879e+00	1,99e-03	4,50e+00	5,136238e-02	8,73e-04
-9,00e-01	1,022813e+00	2,24e-03	4,72e+00	3,247496e-02	7,01e-04
-6,75e-01	9,848647e-01	2,18e-03	4,95e+00	2,310018e-02	9,43e-04
-4,50e-01	9,454532e-01	2,33e-03	5,17e+00	1,339088e-02	8,07e-04
-2,25e-01	9,348751e-01	3,89e-03	5,40e+00	8,941667e-03	2,71e-04
k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-5,62e+00	3,542926e-03	2,80e-04	-1,39e-15	6,345368e-01	1,53e-03
-5,40e+00	5,694891e-03	3,39e-04	2,25e-01	6,409709e-01	1,83e-03
-5,18e+00	9,073258e-03	2,67e-04	4,50e-01	6,655069e-01	2,83e-03
-4,95e+00	1,334305e-02	5,33e-04	6,75e-01	6,898837e-01	1,82e-03
-4,73e+00	2,108873e-02	7,41e-04	9,00e-01	7,120135e-01	2,33e-03
-4,50e+00	3,410079e-02	9,73e-04	1,12e+00	7,215359e-01	2,01e-03
-4,28e+00	4,850726e-02	7,77e-04	1,35e+00	7,207461e-01	4,21e-03
-4,05e+00	7,414461e-02	1,23e-03	1,57e+00	6,916177e-01	3,78e-03
-3,83e+00	1,077856e-01	2,28e-03	1,80e+00	6,396478e-01	2,49e-03
-3,60e+00	1,520099e-01	2,07e-03	2,02e+00	5,822241e-01	2,46e-03
-3,38e+00	2,025588e-01	1,25e-03	2,25e+00	5,077128e-01	2,35e-03
-3,15e+00	2,698753e-01	1,57e-03	2,47e+00	4,199299e-01	3,60e-03
-2,93e+00	3,437941e-01	1,30e-03	2,70e+00	3,421752e-01	2,17e-03
-2,70e+00	4,231522e-01	2,20e-03	2,92e+00	2,743266e-01	1,80e-03
-2,48e+00	5,131058e-01	3,06e-03	3,15e+00	2,064244e-01	1,79e-03
-2,25e+00	5,803025e-01	2,99e-03	3,37e+00	1,493207e-01	1,65e-03
-2,03e+00	6,460180e-01	2,14e-03	3,60e+00	1,085724e-01	1,06e-03
-1,80e+00	6,860891e-01	2,02e-03	3,82e+00	7,428872e-02	1,27e-03
-1,58e+00	7,177249e-01	2,21e-03	4,05e+00	5,258271e-02	2,14e-03
-1,35e+00	7,208999e-01	2,73e-03	4,27e+00	3,054916e-02	2,20e-03
-1,13e+00	7,130416e-01	1,68e-03	4,50e+00	2,125690e-02	3,33e-04
-9,00e-01	6,903224e-01	2,87e-03	4,72e+00	1,306141e-02	3,28e-04
-6,75e-01	6,650794e-01	1,62e-03	4,95e+00	1,324167e-02	3,18e-03
-4,50e-01	6,452773e-01	1,56e-03	5,17e+00	2,240105e-03	3,05e-03
-2,25e-01	6,336967e-01	2,29e-03	5,40e+00	3,972732e-03	3,14e-04

Tabelle A.11: Histogramm von $d\sigma/d\eta$ für das Top-Quark (oben) und für das Top-Antiquark (unten) bei fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-3,12e+00	0,000000e+00	0,00e+00	0,00e+00	7,103997e-01	1,97e-03
-3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	1,25e-01	7,111625e-01	1,87e-03
-2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00	2,50e-01	7,151629e-01	2,18e-03
-2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,75e-01	7,147224e-01	4,36e-03
-2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00	5,00e-01	7,147956e-01	2,32e-03
-2,50e+00	6,650891e-01	3,05e-03	6,25e-01	7,162822e-01	2,36e-03
-2,38e+00	6,739023e-01	4,00e-03	7,50e-01	7,147422e-01	2,29e-03
-2,25e+00	6,907175e-01	4,11e-03	8,75e-01	7,236154e-01	3,03e-03
-2,12e+00	6,949364e-01	2,29e-03	1,00e+00	7,090289e-01	3,00e-03
-2,00e+00	7,047682e-01	3,67e-03	1,12e+00	7,221819e-01	3,66e-03
-1,88e+00	7,052336e-01	3,32e-03	1,25e+00	7,215608e-01	2,23e-03
-1,75e+00	7,171833e-01	2,36e-03	1,38e+00	7,180754e-01	3,34e-03
-1,62e+00	7,145162e-01	2,72e-03	1,50e+00	7,172125e-01	2,28e-03
-1,50e+00	7,184121e-01	2,57e-03	1,62e+00	7,074765e-01	4,85e-03
-1,38e+00	7,129194e-01	3,65e-03	1,75e+00	7,161826e-01	2,86e-03
-1,25e+00	7,248587e-01	2,72e-03	1,88e+00	7,039285e-01	3,38e-03
-1,12e+00	7,174430e-01	1,90e-03	2,00e+00	7,008064e-01	3,00e-03
-1,00e+00	7,156946e-01	1,84e-03	2,12e+00	6,852306e-01	3,01e-03
-8,75e-01	7,176610e-01	2,26e-03	2,25e+00	6,824295e-01	3,57e-03
-7,50e-01	7,118778e-01	2,24e-03	2,38e+00	6,577758e-01	4,65e-03
-6,25e-01	7,102462e-01	3,26e-03	2,50e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-5,00e-01	7,153287e-01	2,66e-03	2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-3,75e-01	7,141104e-01	2,08e-03	2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-2,50e-01	7,073274e-01	2,33e-03	2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-1,25e-01	7,087135e-01	2,05e-03	3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00
k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-3,12e+00	0,000000e+00	0,00e+00	0,00e+00	4,637164e-01	2,45e-03
-3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	1,25e-01	4,623002e-01	1,57e-03
-2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00	2,50e-01	4,629002e-01	1,49e-03
-2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,75e-01	4,651507e-01	2,12e-03
-2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00	5,00e-01	4,625361e-01	1,47e-03
-2,50e+00	3,851038e-01	3,27e-03	6,25e-01	4,644628e-01	2,39e-03
-2,38e+00	3,878073e-01	3,23e-03	7,50e-01	4,636937e-01	1,79e-03
-2,25e+00	4,131956e-01	2,78e-03	8,75e-01	4,652024e-01	1,76e-03
-2,12e+00	4,230771e-01	2,18e-03	1,00e+00	4,544760e-01	3,07e-03
-2,00e+00	4,320484e-01	2,36e-03	1,12e+00	4,616657e-01	1,68e-03
-1,88e+00	4,430863e-01	2,82e-03	1,25e+00	4,604574e-01	2,23e-03
-1,75e+00	4,453307e-01	2,07e-03	1,38e+00	4,550517e-01	2,10e-03
-1,62e+00	4,485281e-01	2,32e-03	1,50e+00	4,527139e-01	1,71e-03
-1,50e+00	4,606722e-01	2,31e-03	1,62e+00	4,476696e-01	2,28e-03
-1,38e+00	4,576413e-01	3,29e-03	1,75e+00	4,453211e-01	2,29e-03
-1,25e+00	4,674757e-01	2,61e-03	1,88e+00	4,264732e-01	3,05e-03
-1,12e+00	4,620760e-01	2,14e-03	2,00e+00	4,220922e-01	2,71e-03
-1,00e+00	4,594422e-01	1,60e-03	2,12e+00	4,082900e-01	2,26e-03
-8,75e-01	4,669240e-01	1,72e-03	2,25e+00	3,972988e-01	2,68e-03
-7,50e-01	4,595830e-01	2,43e-03	2,38e+00	3,775498e-01	3,17e-03
-6,25e-01	4,643368e-01	1,80e-03	2,50e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-5,00e-01	4,636895e-01	2,25e-03	2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-3,75e-01	4,652902e-01	1,82e-03	2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-2,50e-01	4,667133e-01	1,84e-03	2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-1,25e-01	4,599557e-01	1,85e-03	3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00

Tabelle A.12: Histogramm von $d\sigma/d\eta$ für den ersten Jet bei t (oben) und \bar{t} (unten) Produktion mit fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-3,12e+00	0,000000e+00	0,00e+00	0,00e+00	7,281470e-01	4,14e-03
-3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	1,25e-01	7,374336e-01	3,08e-03
-2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00	2,50e-01	7,333631e-01	3,32e-03
-2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,75e-01	7,359780e-01	3,33e-03
-2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00	5,00e-01	7,315075e-01	3,45e-03
-2,50e+00	6,402795e-01	3,45e-03	6,25e-01	7,310828e-01	2,70e-03
-2,38e+00	6,426984e-01	4,39e-03	7,50e-01	7,309744e-01	3,34e-03
-2,25e+00	6,620175e-01	3,08e-03	8,75e-01	7,215838e-01	3,35e-03
-2,12e+00	6,828916e-01	4,54e-03	1,00e+00	7,249009e-01	3,51e-03
-2,00e+00	6,846919e-01	5,43e-03	1,12e+00	7,222345e-01	3,03e-03
-1,88e+00	6,945215e-01	5,10e-03	1,25e+00	7,141282e-01	2,69e-03
-1,75e+00	6,969357e-01	3,44e-03	1,38e+00	7,138215e-01	2,81e-03
-1,62e+00	7,118268e-01	3,42e-03	1,50e+00	7,074102e-01	3,94e-03
-1,50e+00	7,136334e-01	4,12e-03	1,62e+00	7,048602e-01	3,37e-03
-1,38e+00	7,176610e-01	3,22e-03	1,75e+00	6,965007e-01	3,64e-03
-1,25e+00	7,200221e-01	2,98e-03	1,88e+00	6,838850e-01	3,50e-03
-1,12e+00	7,258100e-01	3,38e-03	2,00e+00	6,800644e-01	2,83e-03
-1,00e+00	7,168376e-01	4,01e-03	2,12e+00	6,652086e-01	5,26e-03
-8,75e-01	7,365893e-01	4,28e-03	2,25e+00	6,510597e-01	5,13e-03
-7,50e-01	7,260473e-01	3,73e-03	2,38e+00	6,413565e-01	3,39e-03
-6,25e-01	7,344318e-01	2,64e-03	2,50e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-5,00e-01	7,339918e-01	2,62e-03	2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-3,75e-01	7,281218e-01	4,59e-03	2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-2,50e-01	7,447308e-01	3,57e-03	2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-1,25e-01	7,344710e-01	3,98e-03	3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00
k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb	k_T in GeV	σ in pb	$\Delta\sigma$ in pb
-3,12e+00	0,000000e+00	0,00e+00	0,00e+00	4,637164e-01	2,45e-03
-3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	1,25e-01	4,623002e-01	1,57e-03
-2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00	2,50e-01	4,629002e-01	1,49e-03
-2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00	3,75e-01	4,651507e-01	2,12e-03
-2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00	5,00e-01	4,625361e-01	1,47e-03
-2,50e+00	3,851038e-01	3,27e-03	6,25e-01	4,644628e-01	2,39e-03
-2,38e+00	3,878073e-01	3,23e-03	7,50e-01	4,636937e-01	1,79e-03
-2,25e+00	4,131956e-01	2,78e-03	8,75e-01	4,652024e-01	1,76e-03
-2,12e+00	4,230771e-01	2,18e-03	1,00e+00	4,544760e-01	3,07e-03
-2,00e+00	4,320484e-01	2,36e-03	1,12e+00	4,616657e-01	1,68e-03
-1,88e+00	4,430863e-01	2,82e-03	1,25e+00	4,604574e-01	2,23e-03
-1,75e+00	4,453307e-01	2,07e-03	1,38e+00	4,550517e-01	2,10e-03
-1,62e+00	4,485281e-01	2,32e-03	1,50e+00	4,527139e-01	1,71e-03
-1,50e+00	4,606722e-01	2,31e-03	1,62e+00	4,476696e-01	2,28e-03
-1,38e+00	4,576413e-01	3,29e-03	1,75e+00	4,453211e-01	2,29e-03
-1,25e+00	4,674757e-01	2,61e-03	1,88e+00	4,264732e-01	3,05e-03
-1,12e+00	4,620760e-01	2,14e-03	2,00e+00	4,220922e-01	2,71e-03
-1,00e+00	4,594422e-01	1,60e-03	2,12e+00	4,082900e-01	2,26e-03
-8,75e-01	4,669240e-01	1,72e-03	2,25e+00	3,972988e-01	2,68e-03
-7,50e-01	4,595830e-01	2,43e-03	2,38e+00	3,775498e-01	3,17e-03
-6,25e-01	4,643368e-01	1,80e-03	2,50e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-5,00e-01	4,636895e-01	2,25e-03	2,62e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-3,75e-01	4,652902e-01	1,82e-03	2,75e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-2,50e-01	4,667133e-01	1,84e-03	2,88e+00	0,000000e+00	0,00e+00
-1,25e-01	4,599557e-01	1,85e-03	3,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00

Tabelle A.13: Histogramm von $d\sigma/d\eta$ für den zweiten Jet bei t (oben) und \bar{t} (unten) Produktion mit fester Skala $\mu = m_t$

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	8,568487e-01	3,49e-03	5,00e+02	1,695999e-02	3,65e-04
2,00e+01	2,308369e+00	1,00e-02	5,20e+02	1,312145e-02	6,13e-04
4,00e+01	3,378599e+00	1,78e-02	5,40e+02	1,144260e-02	2,80e-04
6,00e+01	3,961568e+00	1,69e-02	5,60e+02	9,365181e-03	2,15e-04
8,00e+01	3,759571e+00	1,27e-02	5,80e+02	7,658195e-03	1,74e-04
1,00e+02	3,125011e+00	9,19e-03	6,00e+02	6,404456e-03	1,54e-04
1,20e+02	2,424328e+00	7,97e-03	6,20e+02	5,361719e-03	1,34e-04
1,40e+02	1,833402e+00	6,37e-03	6,40e+02	4,380954e-03	1,17e-04
1,60e+02	1,360780e+00	4,92e-03	6,60e+02	3,677616e-03	1,32e-04
1,80e+02	1,012617e+00	4,88e-03	6,80e+02	2,829664e-03	1,24e-04
2,00e+02	7,452855e-01	3,70e-03	7,00e+02	2,652736e-03	8,31e-05
2,20e+02	5,522351e-01	2,38e-03	7,20e+02	1,984889e-03	8,17e-05
2,40e+02	4,137965e-01	2,37e-03	7,40e+02	1,742163e-03	9,60e-05
2,60e+02	3,107195e-01	2,11e-03	7,60e+02	1,569097e-03	4,38e-05
2,80e+02	2,349938e-01	1,46e-03	7,80e+02	1,367118e-03	4,51e-05
3,00e+02	1,777290e-01	1,23e-03	8,00e+02	1,048688e-03	7,07e-05
3,20e+02	1,409779e-01	2,16e-03	8,20e+02	8,815425e-04	8,13e-05
3,40e+02	1,056169e-01	9,07e-04	8,40e+02	8,093166e-04	7,93e-05
3,60e+02	8,362290e-02	9,17e-04	8,60e+02	7,079265e-04	3,70e-05
3,80e+02	6,329555e-02	7,32e-04	8,80e+02	5,872401e-04	3,77e-05
4,00e+02	5,144244e-02	5,09e-04	9,00e+02	5,347318e-04	2,65e-05
4,20e+02	3,964541e-02	7,25e-04	9,20e+02	4,401668e-04	2,40e-05
4,40e+02	3,227496e-02	5,30e-04	9,40e+02	4,148349e-04	2,86e-05
4,60e+02	2,568847e-02	4,07e-04	9,60e+02	3,017154e-04	2,64e-05
4,80e+02	2,079205e-02	3,40e-04	9,80e+02	3,164605e-04	1,98e-05

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	5,772988e-01	5,54e-03	5,00e+02	6,581759e-03	3,55e-04
2,00e+01	1,550328e+00	9,29e-03	5,20e+02	5,370299e-03	2,07e-04
4,00e+01	2,300603e+00	1,74e-02	5,40e+02	4,241404e-03	1,41e-04
6,00e+01	2,704632e+00	1,67e-02	5,60e+02	3,381065e-03	1,60e-04
8,00e+01	2,500283e+00	1,72e-02	5,80e+02	2,234935e-03	3,58e-04
1,00e+02	2,010473e+00	1,28e-02	6,00e+02	2,497431e-03	3,00e-04
1,20e+02	1,534685e+00	1,64e-02	6,20e+02	1,731528e-03	2,11e-04
1,40e+02	1,094053e+00	8,92e-03	6,40e+02	1,559961e-03	6,61e-05
1,60e+02	7,978655e-01	7,74e-03	6,60e+02	1,373282e-03	7,78e-05
1,80e+02	5,709763e-01	7,77e-03	6,80e+02	9,897563e-04	6,33e-05
2,00e+02	4,194472e-01	7,37e-03	7,00e+02	8,687645e-04	6,77e-05
2,20e+02	2,895630e-01	3,53e-03	7,20e+02	6,520742e-04	7,81e-05
2,40e+02	2,089593e-01	2,51e-03	7,40e+02	6,163649e-04	3,30e-05
2,60e+02	1,584303e-01	1,82e-03	7,60e+02	5,445083e-04	5,01e-05
2,80e+02	1,173642e-01	1,58e-03	7,80e+02	3,655159e-04	4,89e-05
3,00e+02	8,591645e-02	1,28e-03	8,00e+02	3,290665e-04	3,25e-05
3,20e+02	6,476127e-02	1,27e-03	8,20e+02	3,079991e-04	1,90e-05
3,40e+02	4,750456e-02	6,35e-04	8,40e+02	2,813257e-04	1,84e-05
3,60e+02	3,961676e-02	1,19e-03	8,60e+02	1,787849e-04	4,95e-05
3,80e+02	2,798800e-02	1,65e-03	8,80e+02	2,186151e-04	2,35e-05
4,00e+02	2,138776e-02	9,43e-04	9,00e+02	2,209991e-04	3,75e-05
4,20e+02	1,871189e-02	1,26e-03	9,20e+02	1,470482e-04	3,47e-05
4,40e+02	1,208786e-02	1,16e-03	9,40e+02	1,054805e-04	3,09e-05
4,60e+02	1,052855e-02	2,56e-04	9,60e+02	1,017085e-04	1,08e-05
4,80e+02	8,660253e-03	3,16e-04	9,80e+02	2,551756e-05	4,85e-05

Tabelle A.14: Histogramm von $d\sigma/dk_T$ für das Top-Quark (oben) und für das Top-Antiquark (unten) bei dynamischer Skala mit $c_d = \frac{1}{2}$

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	5,00e+02	1,784390e-02	6,75e-04
2,00e+01	1,968525e+00	8,75e-03	5,20e+02	1,553036e-02	3,04e-04
4,00e+01	4,888556e+00	1,27e-02	5,40e+02	1,240794e-02	3,10e-04
6,00e+01	4,691732e+00	1,12e-02	5,60e+02	1,005585e-02	2,00e-04
8,00e+01	3,807184e+00	1,38e-02	5,80e+02	8,966924e-03	2,32e-04
1,00e+02	2,926185e+00	7,86e-03	6,00e+02	7,050437e-03	1,48e-04
1,20e+02	2,170708e+00	9,50e-03	6,20e+02	6,373422e-03	1,47e-04
1,40e+02	1,619145e+00	5,47e-03	6,40e+02	4,795642e-03	1,63e-04
1,60e+02	1,209381e+00	5,00e-03	6,60e+02	4,011064e-03	1,24e-04
1,80e+02	8,957835e-01	4,29e-03	6,80e+02	3,537099e-03	9,33e-05
2,00e+02	6,678899e-01	3,24e-03	7,00e+02	2,967724e-03	1,10e-04
2,20e+02	5,102324e-01	3,07e-03	7,20e+02	2,414174e-03	8,42e-05
2,40e+02	3,882020e-01	5,67e-03	7,40e+02	2,230732e-03	8,61e-05
2,60e+02	2,928445e-01	6,09e-03	7,60e+02	1,781730e-03	1,05e-04
2,80e+02	2,197424e-01	3,49e-03	7,80e+02	1,448583e-03	8,66e-05
3,00e+02	1,764859e-01	2,27e-03	8,00e+02	1,345558e-03	6,51e-05
3,20e+02	1,386104e-01	1,35e-03	8,20e+02	1,099092e-03	5,14e-05
3,40e+02	1,048947e-01	1,20e-03	8,40e+02	9,404524e-04	7,22e-05
3,60e+02	8,352688e-02	1,11e-03	8,60e+02	8,891189e-04	4,44e-05
3,80e+02	6,720865e-02	9,24e-04	8,80e+02	7,666072e-04	3,62e-05
4,00e+02	5,225599e-02	8,03e-04	9,00e+02	6,024936e-04	3,96e-05
4,20e+02	4,265508e-02	1,16e-03	9,20e+02	6,208295e-04	3,04e-05
4,40e+02	3,363386e-02	1,20e-03	9,40e+02	4,397967e-04	3,09e-05
4,60e+02	2,792291e-02	5,57e-04	9,60e+02	4,285598e-04	2,15e-05
4,80e+02	2,296436e-02	4,25e-04	9,80e+02	3,501293e-04	2,50e-05

k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb	k_T in GeV	σ in pb	Δ_σ in pb
0,00e+00	0,000000e+00	0,00e+00	5,00e+02	8,330865e-03	2,10e-04
2,00e+01	1,311586e+00	1,32e-02	5,20e+02	7,252843e-03	6,85e-04
4,00e+01	3,315356e+00	1,78e-02	5,40e+02	4,556487e-03	7,59e-04
6,00e+01	3,138002e+00	1,16e-02	5,60e+02	4,035949e-03	2,90e-04
8,00e+01	2,474578e+00	1,99e-02	5,80e+02	3,473778e-03	1,41e-04
1,00e+02	1,859824e+00	1,33e-02	6,00e+02	2,717306e-03	2,15e-04
1,20e+02	1,357395e+00	9,29e-03	6,20e+02	2,347676e-03	6,31e-05
1,40e+02	9,827499e-01	8,49e-03	6,40e+02	2,296746e-03	1,02e-04
1,60e+02	7,052340e-01	5,20e-03	6,60e+02	1,615885e-03	9,48e-05
1,80e+02	5,224456e-01	6,62e-03	6,80e+02	1,543239e-03	7,69e-05
2,00e+02	3,809604e-01	1,46e-02	7,00e+02	1,139131e-03	6,67e-05
2,20e+02	2,676378e-01	1,37e-02	7,20e+02	8,551243e-04	7,05e-05
2,40e+02	2,063331e-01	2,57e-03	7,40e+02	8,056583e-04	4,36e-05
2,60e+02	1,567859e-01	1,95e-03	7,60e+02	7,951324e-04	8,64e-05
2,80e+02	1,161341e-01	1,60e-03	7,80e+02	5,200997e-04	8,98e-05
3,00e+02	8,977261e-02	2,19e-03	8,00e+02	5,092263e-04	4,01e-05
3,20e+02	7,039458e-02	1,81e-03	8,20e+02	5,001561e-04	6,53e-05
3,40e+02	5,124482e-02	1,92e-03	8,40e+02	2,689815e-04	6,91e-05
3,60e+02	3,939435e-02	9,04e-04	8,60e+02	3,696892e-04	3,02e-05
3,80e+02	3,230739e-02	7,70e-04	8,80e+02	2,778493e-04	1,54e-05
4,00e+02	2,429416e-02	1,51e-03	9,00e+02	1,340584e-04	9,44e-05
4,20e+02	2,115596e-02	1,65e-03	9,20e+02	3,092194e-04	8,31e-05
4,40e+02	1,566563e-02	3,32e-04	9,40e+02	1,609193e-04	2,03e-05
4,60e+02	1,201868e-02	4,49e-04	9,60e+02	1,493368e-04	8,62e-06
4,80e+02	1,042229e-02	3,26e-04	9,80e+02	1,465404e-04	8,50e-06

Tabelle A.15: Histogramm von $d\sigma/dk_T$ für den ersten Jet bei t (oben) und bei \bar{t} (unten) Produktion bei dynamischer Skala mit $c_d = \frac{1}{2}$

Literatur

- [1] G. Aad u. a. „Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC“. In: *Physics Letters B* 716.1 (2012), S. 1–29. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931200857X>.
- [2] Serguei Chatrchyan u. a. „Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC“. In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), S. 30–61. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.021. arXiv: 1207.7235 [hep-ex].
- [3] Y. Fukuda u. a. „Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos“. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (8 Aug. 1998), S. 1562–1567. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.1562. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.1562>.
- [4] Q. R. Ahmad u. a. „Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory“. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (7 Juli 2001), S. 071301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.071301. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.071301>.
- [5] F. Abe u. a. „Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab“. In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (14 Apr. 1995), S. 2626–2631. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.2626. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2626>.
- [6] S. Abachi u. a. „Observation of the Top Quark“. In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (14 Apr. 1995), S. 2632–2637. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.2632. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2632>.
- [7] B. W. Harris u. a. „The Fully differential single top quark cross-section in next to leading order QCD“. In: *Phys. Rev. D* 66 (2002), S. 054024. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.054024. arXiv: hep-ph/0207055 [hep-ph].
- [8] John M. Campbell, R. Keith Ellis und Francesco Tramontano. „Single top production and decay at next-to-leading order“. In: *Phys. Rev. D* 70 (2004), S. 094012. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.094012. arXiv: hep-ph/0408158 [hep-ph].
- [9] Mathias Brucherseifer, Fabrizio Caola und Kirill Melnikov. „On the NNLO QCD corrections to single-top production at the LHC“. In: *Phys. Lett. B* 736 (2014), S. 58–63. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.06.075. arXiv: 1404.7116 [hep-ph].
- [10] Edmond L. Berger u. a. „NNLO QCD Corrections to t-channel Single Top-Quark Production and Decay“. In: *Phys. Rev. D* 94.7 (2016), S. 071501. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.071501. arXiv: 1606.08463 [hep-ph].
- [11] Stefano Catani u. a. „The Dipole formalism for next-to-leading order QCD calculations with massive partons“. In: *Nucl. Phys. B* 627 (2002), S. 189–265. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00098-6. arXiv: hep-ph/0201036 [hep-ph].

- [12] Duc Ninh Le. ldinh@ifirse.icise.vn.
- [13] M. Aliev u. a. „HATHOR: HAdronic Top and Heavy quarks crOss section calculator“. In: *Comput. Phys. Commun.* 182 (2011), S. 1034–1046. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.12.040. arXiv: 1007.1327 [hep-ph].
- [14] P. Kant u. a. „HatHor for single top-quark production: Updated predictions and uncertainty estimates for single top-quark production in hadronic collisions“. In: *Comput. Phys. Commun.* 191 (2015), S. 74–89. DOI: 10.1016/j.cpc.2015.02.001. arXiv: 1406.4403 [hep-ph].
- [15] T. Aaltonen u. a. „Observation of Electroweak Single Top-Quark Production“. In: *Phys. Rev. Lett.* 103 (9 Aug. 2009), S. 092002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.092002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.092002>.
- [16] V. M. Abazov u. a. „Observation of Single Top-Quark Production“. In: *Phys. Rev. Lett.* 103 (9 Aug. 2009), S. 092001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.092001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.092001>.
- [17] Victor Mukhamedovich Abazov u. a. „Evidence for s-channel single top quark production in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV“. In: *Phys. Lett.* B726 (2013), S. 656–664. DOI: 10.1016/j.physletb.2013.09.048. arXiv: 1307.0731 [hep-ex].
- [18] T. Aaltonen u. a. „Tevatron Combination of Single-Top-Quark Cross Sections and Determination of the Magnitude of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix Element V_{tb} “. In: *Phys. Rev. Lett.* 115 (15 Okt. 2015), S. 152003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.152003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.152003>.
- [19] G. Aad u. a. „Evidence for the associated production of a W boson and a top quark in ATLAS at $s=7$ TeV“. In: *Physics Letters B* 716.1 (2012), S. 142–159. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.011>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312008489>.
- [20] S. Chatrchyan u. a. „Evidence for Associated Production of a Single Top Quark and W Boson in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV“. In: *Phys. Rev. Lett.* 110 (2 Jan. 2013), S. 022003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.022003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.022003>.
- [21] Georges Aad u. a. „Evidence for single top-quark production in the s-channel in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector using the Matrix Element Method“. In: *Phys. Lett.* B756 (2016), S. 228–246. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.03.017. arXiv: 1511.05980 [hep-ex].
- [22] Morad Aaboud u. a. „Fiducial, total and differential cross-section measurements of t-channel single top-quark production in pp collisions at 8 TeV using data collected by the ATLAS detector“. In: *Eur. Phys. J. C* 77.8 (2017), S. 531. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5061-9. arXiv: 1702.02859 [hep-ex].
- [23] Morad Aaboud u. a. „Measurement of the inclusive cross-sections of single top-quark and top-antiquark t-channel production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector“. In: *JHEP* 04 (2017), S. 086. DOI: 10.1007/JHEP04(2017)086. arXiv: 1609.03920 [hep-ex].

- [24] Albert M Sirunyan u. a. „Cross section measurement of t -channel single top quark production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV“. In: *Phys. Lett. B* 772 (2017), S. 752–776. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.07.047. arXiv: 1610.00678 [hep-ex].
- [25] Michał Czakon, Paul Fiedler und Alexander Mitov. „Total Top-Quark Pair-Production Cross Section at Hadron Colliders Through $O(\alpha_s^4)$ “. In: *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013), S. 252004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252004. arXiv: 1303.6254 [hep-ph].
- [26] Johann H. Kuhn, A. Scharf und P. Uwer. „Electroweak effects in top-quark pair production at hadron colliders“. In: *Eur. Phys. J. C* 51 (2007), S. 37–53. DOI: 10.1140/epjc/s10052-007-0275-x. arXiv: hep-ph/0610335 [hep-ph].
- [27] John M. Campbell und Francesco Tramontano. „Next-to-leading order corrections to Wt production and decay“. In: *Nucl. Phys. B* 726 (2005), S. 109–130. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.08.015. arXiv: hep-ph/0506289 [hep-ph].
- [28] Qing-Hong Cao und C.-P. Yuan. „Single top quark production and decay at next-to-leading order in hadron collisions“. In: *Phys. Rev. D* 71 (5 März 2005), S. 054022. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.054022. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.054022>.
- [29] Qing-Hong Cao, Reinhard Schwienhorst und C.-P. Yuan. „Next-to-leading order corrections to single top quark production and decay at the Fermilab Tevatron: s -channel process“. In: *Phys. Rev. D* 71 (5 März 2005), S. 054023. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.054023. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.054023>.
- [30] Nikolaos Kidonakis. „Single top quark production at the Fermilab Tevatron: Threshold resummation and finite-order soft gluon corrections“. In: *Phys. Rev. D* 74 (11 Dez. 2006), S. 114012. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.114012. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.114012>.
- [31] Nikolaos Kidonakis. „Next-to-next-to-leading-order collinear and soft gluon corrections for t -channel single top quark production“. In: *Phys. Rev. D* 83 (9 Mai 2011), S. 091503. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.091503. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.091503>.
- [32] Stefano Frixione u. a. „Single-top production in MC@NLO“. In: *JHEP* 03 (2006), S. 092. DOI: 10.1088/1126-6708/2006/03/092. arXiv: hep-ph/0512250 [hep-ph].
- [33] Simone Alioli u. a. „NLO single-top production matched with shower in POWHEG: s - and t -channel contributions“. In: *JHEP* 09 (2009). [Erratum: JHEP02,011(2010)], S. 111. DOI: 10.1007/JHEP02(2010)011, 10.1088/1126-6708/2009/09/111. arXiv: 0907.4076 [hep-ph].
- [34] J. Kuipers u. a. „FORM version 4.0“. In: *CoRR* abs/1203.6543 (2012).
- [35] Nikolaos Kidonakis. „Single top quark production at the Fermilab Tevatron: Threshold resummation and finite-order soft gluon corrections“. In: *Phys. Rev. D* 74 (11 Dez. 2006), S. 114012. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.114012. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.114012>.

- [36] Scott S. D. Willenbrock und Duane A. Dicus. „Production of heavy quarks from W-gluon fusion“. In: *Phys. Rev. D* 34 (1 Juli 1986), S. 155–161. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.155. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.155>.
- [37] R. K. Ellis, W. J. Stirling und B. R. Webber. *QCD and Collider Physics*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 1996. DOI: 10.1017/CB09780511628788.
- [38] Matteo Cacciari, Gavin P. Salam und Gregory Soyez. „The Anti-k(t) jet clustering algorithm“. In: *JHEP* 04 (2008), S. 063. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/04/063. arXiv: 0802.1189 [hep-ph].
- [39] Matteo Cacciari, Gavin P. Salam und Gregory Soyez. „FastJet user manual“. In: *The European Physical Journal C* 72.3 (2012), S. 1896. DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-1896-2. URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1896-2>.
- [40] S. Badger, B. Biedermann und P. Uwer. „NGLuon: A package to calculate one-loop multi-gluon amplitudes“. In: *Computer Physics Communications* 182.8 (2011), S. 1674–1692. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2011.04.008>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465511001263>.
- [41] E. Byckling und K. Kajantie. *Particle Kinematics*. John Wiley und Sons Ltd, 1973.
- [42] G. P. Lepage. „A new algorithm for adaptive multidimensional integration“. In: *Journal of Computational Physics* 27 (Mai 1978), S. 192–203. DOI: 10.1016/0021-9991(78)90004-9.
- [43] C. Patrignani u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Chin. Phys.* C40.10 (2016), S. 100001. DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.
- [44] Jon Butterworth u. a. „PDF4LHC recommendations for LHC Run II“. In: *J. Phys.* G43 (2016), S. 023001. DOI: 10.1088/0954-3899/43/2/023001. arXiv: 1510.03865 [hep-ph].
- [45] L. A. Harland-Lang u. a. „Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs“. In: *Eur. Phys. J.* C75.5 (2015), S. 204. DOI: 10.1140/epjc/s10052-015-3397-6. arXiv: 1412.3989 [hep-ph].
- [46] Sayipjamal Dulat u. a. „New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics“. In: *Phys. Rev. D* 93.3 (2016), S. 033006. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.033006. arXiv: 1506.07443 [hep-ph].
- [47] Richard D. Ball u. a. „Parton distributions for the LHC Run II“. In: *JHEP* 04 (2015), S. 040. DOI: 10.1007/JHEP04(2015)040. arXiv: 1410.8849 [hep-ph].
- [48] Andy Buckley u. a. „LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era“. In: *Eur. Phys. J.* C75 (2015), S. 132. DOI: 10.1140/epjc/s10052-015-3318-8. arXiv: 1412.7420 [hep-ph].
- [49] G Peter Lepage. „A new algorithm for adaptive multidimensional integration“. In: *Journal of Computational Physics* 27.2 (1978), S. 192–203. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(78\)90004-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(78)90004-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999178900049>.
- [50] John M. Campbell u. a. „Next-to-Leading-Order Predictions for t-Channel Single-Top Production at Hadron Colliders“. In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009), S. 182003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.182003. arXiv: 0903.0005 [hep-ph].

- [51] Michael E. Peskin und Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. URL: <http://www.slac.stanford.edu/~mpeskin/QFT.html>.
- [52] Toichiro Kinoshita. „Mass Singularities of Feynman Amplitudes“. In: *Journal of Mathematical Physics* 3.4 (1962), S. 650–677. DOI: 10.1063/1.1724268. eprint: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1724268>. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1724268>.
- [53] T. D. Lee und M. Nauenberg. „Degenerate Systems and Mass Singularities“. In: *Phys. Rev.* 133 (6B März 1964), B1549–B1562. DOI: 10.1103/PhysRev.133.B1549. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.133.B1549>.
- [54] M. Assadsolimani u. a. „Calculation of two-loop QCD corrections for hadronic single top-quark production in the t channel“. In: *Phys. Rev.* D90.11 (2014), S. 114024. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.114024. arXiv: 1409.3654 [hep-ph].
- [55] R.D. Field. *Applications of perturbative QCD*. Frontiers in physics. Addison-Wesley, The Advanced Book Program, 1989.
- [56] P. Nogueira. „Automatic Feynman Graph Generation“. In: *Journal of Computational Physics* 105.2 (1993), S. 279–289. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1993.1074>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999183710740>.
- [57] R. Kleiss und W.J. Stirling. „Spinor techniques for calculating $pp \rightarrow W^\pm/Z + \text{jets}$ “. In: *Nuclear Physics B* 262.2 (1985), S. 235–262. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90285-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90285-8). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385902858>.
- [58] T.L. Trueman. „Spurious anomalies in dimensional renormalization“. In: *Z. Phys.* C69 (1996), S. 525–536. DOI: 10.1007/s002880050057. arXiv: hep-ph/9504315 [hep-ph].
- [59] R. Keith Ellis und Giulia Zanderighi. „Scalar one-loop integrals for QCD“. In: *JHEP* 02 (2008), S. 002. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/02/002. arXiv: 0712.1851 [hep-ph].
- [60] G.J. van Oldenborgh. „FF — a package to evaluate one-loop Feynman diagrams“. In: *Computer Physics Communications* 66.1 (1991), S. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(91\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0010-4655(91)90002-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010465591900023>.
- [61] G. Passarino und M.J.G. Veltman. „One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model“. In: *Nucl. Phys.* B160 (1979), S. 151. DOI: 10.1016/0550-3213(79)90234-7.
- [62] Peter Uwer. Peter.Uwer@physik.hu-berlin.de.
- [63] Walter T. Giele und E.W. Nigel Glover. „A calculational formalism for one-loop integrals“. In: *Journal of High Energy Physics* 2004.04 (2004), S. 029. URL: <http://stacks.iop.org/1126-6708/2004/i=04/a=029>.
- [64] J. Fleischer, T. Riemann und V. Yundin. „PJFry: A C++ package for tensor reduction of one-loop Feynman intergals“. In: (2011).

- [65] J. Fleischer und T. Riemann. „A Complete algebraic reduction of one-loop tensor Feynman integrals“. In: *Phys. Rev. D* 83 (2011), S. 073004. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.073004. arXiv: 1009.4436 [hep-ph].
- [66] G. 't Hooft und M. Veltman. „Scalar one-loop integrals“. In: *Nuclear Physics B* 153 (1979), S. 365–401. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90605-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90605-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379906059>.
- [67] Ansgar Denner und S. Dittmaier. „Reduction schemes for one-loop tensor integrals“. In: *Nucl. Phys. B* 734 (2006), S. 62–115. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.11.007. arXiv: hep-ph/0509141 [hep-ph].
- [68] A.I. Davydychev. „A simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals“. In: *Physics Letters B* 263.1 (1991), S. 107–111. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)91715-8](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(91)91715-8). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269391917158>.
- [69] O. V. Tarasov. „Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension“. In: *Phys. Rev. D* 54 (1996), S. 6479–6490. DOI: 10.1103/PhysRevD.54.6479. arXiv: hep-th/9606018 [hep-th].
- [70] W. Beenakker u. a. „NLO QCD corrections to t anti- t H production in hadron collisions“. In: *Nucl. Phys. B* 653 (2003), S. 151–203. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00044-0. arXiv: hep-ph/0211352 [hep-ph].
- [71] Stefano Catani und Michael H. Seymour. „Jet cross-sections at next-to-leading order“. In: *Acta Phys. Polon. B* 28 (1997), S. 863–881. arXiv: hep-ph/9612236 [hep-ph].
- [72] S. Catani und M. H. Seymour. „A General algorithm for calculating jet cross-sections in NLO QCD“. In: *Nucl. Phys. B* 485 (1997). [Erratum: *Nucl. Phys. B* 510, 503 (1998)], S. 291–419. DOI: 10.1016/S0550-3213(96)00589-5, 10.1016/S0550-3213(98)81022-5. arXiv: hep-ph/9605323 [hep-ph].
- [73] J. Alwall u. a. „The automated computation of tree-level and next-to-leading order differential cross sections, and their matching to parton shower simulations“. In: *JHEP* 07 (2014), S. 079. DOI: 10.1007/JHEP07(2014)079. arXiv: 1405.0301 [hep-ph].
- [74] H. Murayama, I. Watanabe und Kaoru Hagiwara. „HELAS: HELicity amplitude subroutines for Feynman diagram evaluations“. In: (1992).
- [75] Yu. L. Dokshitzer. In: *Sov. Phys. JETP* 46 (1977) 641 (1977).
- [76] L.N. Lipatov V.N. Gribov. In: *Sov. J. Nucl. Phys.* 15 (1972) 438 (1972).
- [77] G. Altarelli und G. Parisi. „Asymptotic freedom in parton language“. In: *Nuclear Physics B* 126.2 (1977), S. 298–318. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(77\)90384-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90384-4). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844>.
- [78] Gavin Cullen u. a. „GOSAM-2.0: a tool for automated one-loop calculations within the Standard Model and beyond“. In: *Eur. Phys. J. C* 74.8 (2014), S. 3001. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3001-5. arXiv: 1404.7096 [hep-ph].
- [79] K. Hasegawa. „Super AutoDipole“. In: *Eur. Phys. J. C* 70 (2010), S. 285–293. DOI: 10.1140/epjc/s10052-010-1452-x. arXiv: 1007.1585 [hep-ph].

- [80] S. Kawabata. „A new Monte Carlo event generator for high energy physics“. In: *Computer Physics Communications* 41.1 (1986), S. 127–153. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(86\)90025-1](https://doi.org/10.1016/0010-4655(86)90025-1). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010465586900251>.
- [81] S. Catani und B. R. Webber. „Infrared safe but infinite: Soft gluon divergences inside the physical region“. In: *JHEP* 10 (1997), S. 005. DOI: 10.1088/1126-6708/1997/10/005. arXiv: [hep-ph/9710333](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9710333) [hep-ph].
- [82] Stefano Carrazza u. a. „MINLO t-channel single-top plus jet“. In: (2018). arXiv: 1805.09855 [hep-ph].
- [83] Keith Hamilton, Paolo Nason und Giulia Zanderighi. „MINLO: Multi-Scale Improved NLO“. In: *JHEP* 10 (2012), S. 155. DOI: 10.1007/JHEP10(2012)155. arXiv: 1206.3572 [hep-ph].
- [84] Simone Alioli u. a. „A general framework for implementing NLO calculations in shower Monte Carlo programs: the POWHEG BOX“. In: *JHEP* 06 (2010), S. 043. DOI: 10.1007/JHEP06(2010)043. arXiv: 1002.2581 [hep-ph].
- [85] Andy Buckley u. a. „LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era“. In: *Eur. Phys. J. C* 75 (2015), S. 132. DOI: 10.1140/epjc/s10052-015-3318-8. arXiv: 1412.7420 [hep-ph].
- [86] Fernando Pérez und Brian E. Granger. „IPython: a System for Interactive Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (Mai 2007), S. 21–29. DOI: 10.1109/MCSE.2007.53. URL: <https://ipython.org>.
- [87] Travis Oliphant. *Guide to NumPy*. Jan. 2006.
- [88] J. D. Hunter. „Matplotlib: A 2D graphics environment“. In: *Computing In Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
- [89] D. Binosi und L. Theußl. „JaxoDraw: A graphical user interface for drawing Feynman diagrams“. In: *Computer Physics Communications* 161.1 (2004), S. 76–86. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2004.05.001>.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfen und Hilfsmittel angefertigt zu haben. Ich habe mich nicht anderwärts um einen Doktorgrad in dem Promotionsfach beworben und besitze keinen entsprechenden Doktorgrad. Die Promotionsordnung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät, veröffentlicht im Amtlichen Mitteilungsblatt der Humboldt-Universität zu Berlin Nr. 42 am 11. Juli 2018, habe ich zur Kenntnis genommen.

Berlin, 4. September 2018

Stefan Mölbitz